

1. 光学基礎 (SI 単位系を用いる)

1. 1 平面波の伝播

光には波動性と粒子性の 2 重の性質がある。光の粒子的な振る舞いを記述するためには量子光学を用いるが、波としての振る舞いを記述するには波動光学が用いられる。前者はより一般的な理論であり、レーザー発振など記述する際には必要となるが、光の伝播に関する振る舞い (反射、屈折、回折、干渉など) を記述するには波動光学を用いるのが便利である。本章ではマクスウェルの方程式から出発して、真空中を伝播する平面波を記述する式を導出し、平面波の反射、屈折、回折現象などについて解説する。

	光の波動性(古典的)	光の粒子性(量子性)
理論	波動光学 (Huygens の原理など)	量子光学 (プランクの輻射公式など)
現象	屈折、干渉、回折効果など	光電効果、コンプトン散乱

古典的な電磁波の振る舞いは次の 4 つの式 (Maxwell の方程式) で記述される。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (\text{電荷からの電気力線の発散を表す}) \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁気モノポールは存在しないので磁束の発散は常にゼロ}) \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{実電流 + 変位電流によって磁場が誘起されることを表す}) \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{磁束の変化によって電場が誘起されることを表す}) \quad (4)$$

媒質の性質は誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、比電気伝導度 σ で特性付けられ、それぞれ

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (5)$$

で定義される。

真電荷分布、伝導電流のない一様媒質を仮定する。すなわち

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad \epsilon = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}$$

このとき Maxwell 方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (9)$$

これらの式を変形すると次のような電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} に関する波動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

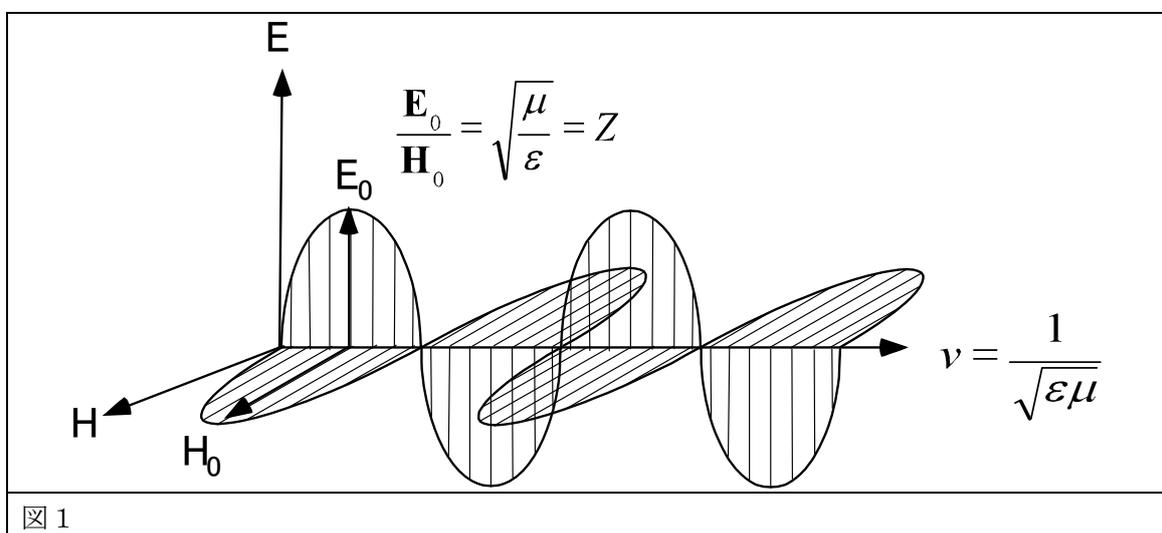
電界と磁界はそれぞれ電波および磁波として相伴って（一方が他方を誘導しながら）伝播し、その伝播速度 v は上の式から

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (12)$$

で与えられる。真空中では

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (13)$$

となり実験的に求められている真空中の光速度に一致する。



ここで角周波数 ω で振動し、均一で吸収のない媒質中を z 軸方向に伝播する電磁界平面波について考える。電界、磁界成分は Phasor 表示（実部が意味のある物理量を表す。演算の実行に便利な表示方法）でそれぞれ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[j(\omega t - k_z z)] \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[j(\omega t - k_z z)] \quad (15)$$

で表される。ここで z 軸方向の波数ベクトル k_z は

$$k_z = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/v_z \quad (16)$$

で与えられる。発散の式(6)と(7)から電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} は進行方向（+ z ）に対して垂直であることが導かれる。また電磁誘導を表す式(8)と(9)から電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} は互いに垂直であることも導かれる(図 1 参照)。電波の振幅 \mathbf{E}_0 と磁界 \mathbf{H}_0 の比は媒質によって決まる特性値で、抵抗の単位をもつので特性インピーダンスと呼ばれる。

$$\frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{H}_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z \quad (\text{特性インピーダンス}) \quad (17)$$

屈折率は真空中の位相速度（波の等位相面が進む速度、真空中では光速） c に対する媒質中の位相速度 v の比として表されるので

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{k_e k_m} \quad (18)$$

で与えられる。ここで ε_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、真空の透磁率を表し、 k_e と k_m はそれぞれ比誘電率、比透磁率を表す。磁性体以外の物質では k_m はほとんど 1 に等しいので

$$n = \sqrt{k_e} \quad (19)$$

である。屈折率 n の媒質中の電磁波の波長は

$$\lambda = c/(fn) = \lambda_0/n \quad (20)$$

で与えられる。ここで f は振動数、 λ_0 は真空中での波長を表す。

電界と磁界のベクトル積はエネルギーの流れの大きさを表し **Pointing** ベクトルと呼ばれる。

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \quad (22)$$

その平均値の大きさは

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} E_0^2 \quad (23)$$

で与えられる。一方、電磁波の強度は単位時間に単位面積を通過するエネルギーとして定義される。電磁波のエネルギー密度（空間平均）は $\frac{1}{2} \varepsilon E_0^2$ で与えられるので

と表される ($k_m \cong 1$ とした)。したがって、Pointing ベクトルの平均値は、電磁波の強度に等しい。

$$\begin{aligned} I &= v \times \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \times \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} E_0^2 = |\bar{\mathbf{S}}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_e \varepsilon_0}{k_m \mu_0}} E_0^2 \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_e \varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = \frac{n}{2Z_0} E_0^2 \end{aligned} \quad (24)$$

と表される ($k_m \cong 1$ とした)。したがって、Pointing ベクトルの平均値は、電磁波の強度に等しい。

1. 2 偏光

(i)直線偏光

一般に波動方程式(10)または(11)の解には 2 つの独立な解（モード）が存在する。電場のほうに着目し、直交するそれぞれのモードを x 軸方向、 y 軸方向にとると、任意の平面波

はこれらの2つのモードの重ね合わせで記述することができる。 $z=0$ での、ある平面波の電場は

$$\mathbf{E} = E_x \exp[j\omega t] + E_y \exp[j\omega t + \phi] \quad (25)$$

と表せる。ここで ϕ はx軸方向のモードとy軸方向のモードの電磁波成分の間の位相差である。位相差がゼロのとき、直線偏光、すなわち、電場の振動方向が一定で変化しない平面波に対応している。これを直線偏光と呼ぶ。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\theta \exp[j\omega t], \quad (\theta \text{は偏光軸 } \mathbf{E}_\theta \text{が } x \text{ 軸となす角}) \quad (26)$$

$$|\mathbf{E}_\theta| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}, \quad \tan \theta = E_y / E_x$$

位相差が π の整数倍の場合も同様である。ただし奇数次と偶数次とでは偏光方向がx軸またはy軸について反転する(図2の(a)と(e)を見よ)。

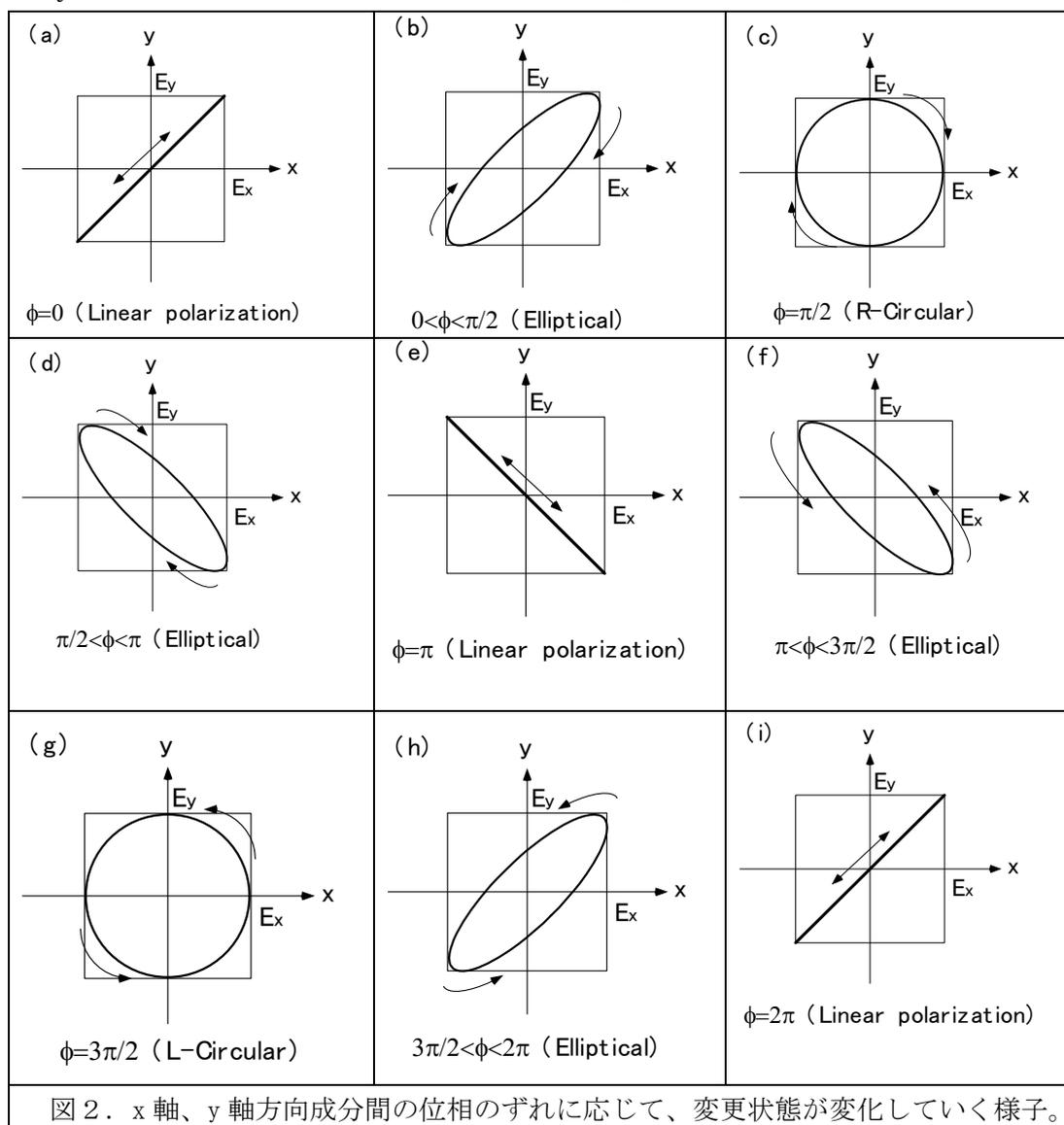


図2. x軸、y軸方向成分間の位相のずれに応じて、変更状態が変化していく様子。

(ii)円偏光

E_x と E_y が等しく ($E_x=E_y=E_0$) 位相差が $\pm\pi/2$ のとき平面波は

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x \exp[j\omega t] + E_0 \mathbf{e}_y \exp[j\omega t \pm \pi/2] \quad (27)$$

と表され($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ はそれぞれ x 軸、 y 軸方向の単位ベクトル)、振幅は一定で定速度で電場方向が回転する円偏光状態を表す。位相差の前の“+”および“-”の符号は電場の回転方向に対応している。 E_x と E_y が等しくないか、位相差がゼロ (または位相差 π の整数倍) でも位相差が $\pm\pi/2$ でもない場合は楕円偏光となる。

図2に E_x と E_y が等しい場合に位相差のずれに対応した偏光状態 (電場ベクトルの軌跡) を模式的に示す。

E_x と E_y が等しくない場合は電場ベクトルの描く軌跡は、位相差が π の整数倍のとき E_x と E_y で作られる長方形の対角線で、それ以外の場合は E_x と E_y で作られる長方形に接する楕円で表される。

<誘電率 ϵ 、分極 \mathbf{P} 、電束密度 \mathbf{D} >

真空中を伝播する電磁波について考察したが、光が物質中を伝播する場合、(5)式で定義される誘電率 ϵ または伝導率 σ が重要である。透磁率 μ は磁性体を扱う場合は重要になるが、それ以外の場合では巨視的な光物性値として誘電率が非常に重要になる。変動する電界に対する応答を考える場合には誘電率も伝導率も一般に複素数として与えられ、複素誘電率と複素伝導率の間には 1 対 1 の対応がある。したがって、光応答 (または光物性) を考える場合、どちらか一方に注目すればよい。通常は誘電率に着目して議論することが多い。さて、ここで誘電率 ϵ 、電束密度 \mathbf{D} の意味について考えてみる。

誘電体に外から電界を加えると、誘電体内部には (1) 物質を構成する分子が持つ永久双極子が配向することによってできる双極子モーメント、あるいは (2) 電場により物質を構成する原子、または分子に双極子が誘起されてできる双極子モーメントが発生する。前者を永久双極子、後者を誘導双極子という。電場により物質中に誘起された、単位体積あたりの双極子モーメントを誘電分極(\mathbf{P})という。誘電体内部の分極電荷密度を ρ_p とすると

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_p \quad (28)$$

の関係がある。この式は、誘電分極が一様な場合は、誘電体の表面のみに分極電荷が現れ、誘電体内部の分極電荷はゼロになることを示す。またマイナスの符号がついているのは、分極電荷が外部電界を打ち消すような分布をすることを意味している。Gauss の法則の微分形は分極電荷がある場合は

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \quad (29)$$

と書ける。ここで ρ は真電荷である。通常我々は分極電荷の分布や大きさを知ることが困難

なので、(28)式を使って ρ_P を消去すると、

$$\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (30)$$

と書くことができる((1)式が得られた)。このようにして定義される \mathbf{D} が電束密度であり、電束密度は正極電荷の存在を無視して、真電荷による電界の発散を考えられるようにするための便宜的な量と考えることができる。

誘電分極 \mathbf{P} はその点における電場 \mathbf{E} に比例し、

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (31)$$

と書くことができる。ここで無次元の係数 χ_e を電気感受率という。 \mathbf{P} が \mathbf{E} に比例するので電束密度も \mathbf{E} に比例し、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (32)$$

と表すことができる。誘電率は

$$\epsilon \equiv (1 + \chi_e) \epsilon_0 = \kappa_e \epsilon_0 \quad (33)$$

で定義される。ここで κ_e は比誘電率である。ちなみに c.g.s. ガウス(esu)単位系では $\epsilon_0=1$, $\mu_0=1$ と取るので比誘電率と誘電率は等しくなる(したがって、誘電率と比誘電率を混同しやすいが、誘電率 12 などと言う場合、この比誘電率を指すことが多い)。これらの式から分かるように、誘電率は誘電分極の程度を表す、物性値である。

1. 3 反射・透過・屈折

光が屈折率の異なる媒質の境界面に入射すると、光の一部は反射され、一部は少し向きを変え透過される。光線の反射、透過、屈折の法則は電界、磁界の媒質境界での面内成分がともに連続であることから導くことができる(境界面に垂直な成分は保存されず、連続性が崩れる)。ここでは屈折の法則、すなわち Snell の法則は与えられたものとして、境界面内成分の連続性を用いて反射率と透過率を求めてみよう。

図3のように光が媒質1(屈折率 n_1)から角度 α で媒質2(屈折率 n_2)へ入射する場合を考える。Snellの法則によれば入射角 α と屈折角 β は

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (34)$$

で与えられ、反射角は入射角に等しい。

光線の電気ベクトルの入射面(入射光線と法線とを含む平面)に垂直な入射、反射、透過波の成分をそれぞれ、 $\mathbf{E}_s, \mathbf{E}_s', \mathbf{E}_s''$, 面内のものを $\mathbf{E}_p, \mathbf{E}_p', \mathbf{E}_p''$ とする。磁気ベクトルについても同様に、 $\mathbf{H}_s, \mathbf{H}_s', \mathbf{H}_s''$, 及び $\mathbf{H}_p, \mathbf{H}_p', \mathbf{H}_p''$ とする。まず、 \mathbf{E} ベクトルが入射面に垂直に入射する場合、すなわち s 偏光の場合を考える。すなわち、図3において電気ベクトルの各成分は紙面に垂直である。境界面に平行な成分の連続性から、入射と反射の成分を足し合わせたものが、境界面で透過成分と等しくなるので

$$E_s + E_s' = E_s'' \quad (35)$$

一方、 \mathbf{H} ベクトルは入射面内にあるが、それらの境界面に平行な成分は連続するから図3

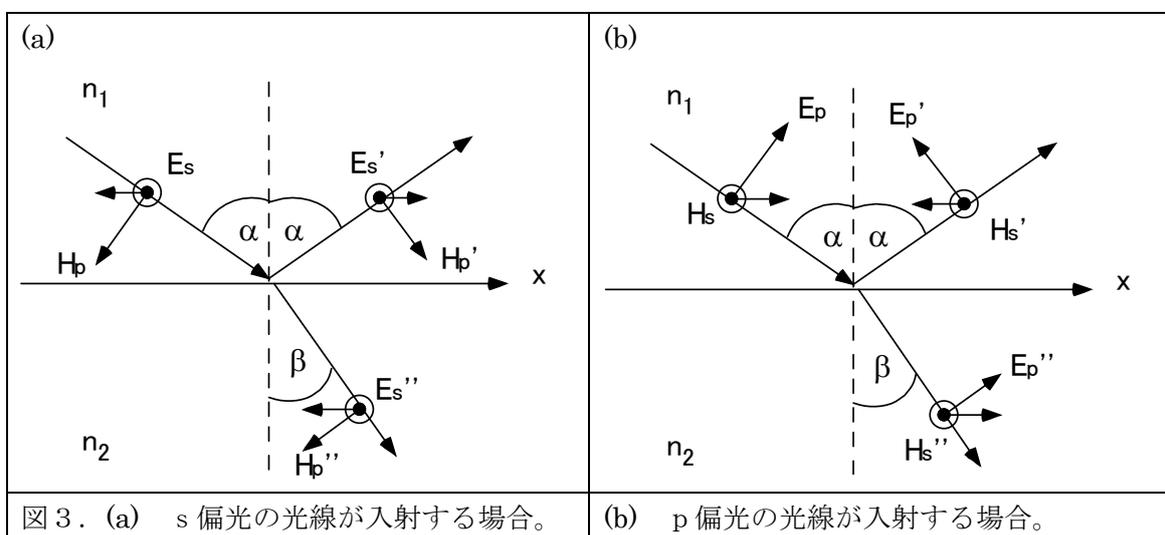
を参照し、

$$H_p \cos \alpha - H_p' \cos \alpha = H_p'' \cos \beta \quad (36)$$

電磁波の E ベクトルと H ベクトルの大きさの関係は各媒質の特性インピーダンスから決まるので、

$$E_s = Z_1 H_p, \quad E_s' = Z_1 H_p', \quad \left(Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \right) \quad (37)$$

$$E_s'' = Z_2 H_p'', \quad \left(Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \right)$$



この関係を用いて式(36)は

$$\frac{E_s}{Z_1} \cos \alpha - \frac{E_s'}{Z_1} \cos \alpha = \frac{E_s''}{Z_2} \cos \beta \quad (38)$$

この式と式(35)を用いて入射波と反射波の振幅比と入射波と透過波の振幅比はそれぞれ、

$$r_s = \frac{E_s'}{E_s} = \frac{Z_2 \cos \alpha - Z_1 \cos \beta}{Z_2 \cos \alpha + Z_1 \cos \beta}, \quad (39)$$

$$t_s = \frac{E_s''}{E_s} = \frac{2Z_2 \cos \alpha}{Z_2 \cos \alpha + Z_1 \cos \beta}$$

それぞれ、振幅反射率、振幅透過率と呼ぶ（強度に対する反射率、強度透過率は後で示す）。入射角がゼロのときは $(\alpha=\beta=0) \cos \alpha = \cos \beta = 1$ となり、

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

$$t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$
(40)

(垂直入射では偏光方向の区別がなくなるので添え字 s は省いた)

同様に \mathbf{E} ベクトルが入射面内にある場合、すなわち p 偏光の場合は、

$$r_p = \frac{E_p'}{E_p} = \frac{Z_1 \cos \alpha - Z_2 \cos \beta}{Z_1 \cos \alpha + Z_2 \cos \beta},$$

$$t_p = \frac{E_p''}{E_p} = \frac{2Z_2 \cos \alpha}{Z_1 \cos \alpha + Z_2 \cos \beta}$$
(41)

強磁性体以外では $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ であるので、屈折率は

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 / \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{Z_1} \sqrt{\mu_1^2 / \varepsilon_0 \mu_0} \approx \frac{Z_0}{Z_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{Z_2} \sqrt{\mu_2^2 / \varepsilon_0 \mu_0} \approx \frac{Z_0}{Z_2}$$
(42)

と近似され、(35)、(36)は下記のように表記することができる。

$$r_s = \frac{E_s'}{E_s} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = \frac{n_1 \cos \alpha - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}}{n_1 \cos \alpha + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$t_s = \frac{E_s''}{E_s} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$r_p = \frac{E_p'}{E_p} = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} = \frac{n_2^2 \cos \alpha - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}}{n_2^2 \cos \alpha + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)},$$

$$t_p = \frac{E_p''}{E_p} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} = \frac{2n_1 n_2 \cos \alpha}{n_2^2 \cos \alpha + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$$
(43)

(44)

垂直入射の場合は

$$r = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1},$$

$$t = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$
(45)

となる。ここで、振幅反射率の符号は(39)、(40)式にもとづく s 偏光と p 偏光では反転するが、これは \mathbf{E}_p と \mathbf{E}_p' を図 3 の x 軸方向成分が互いに逆向きになるように定義したため、物理的には等価である。 $n_1=1.0, n_2=1.5$ (ガラスの屈折率) の場合の各振幅反射、透過

率の入射角度依存性を図4に示す。

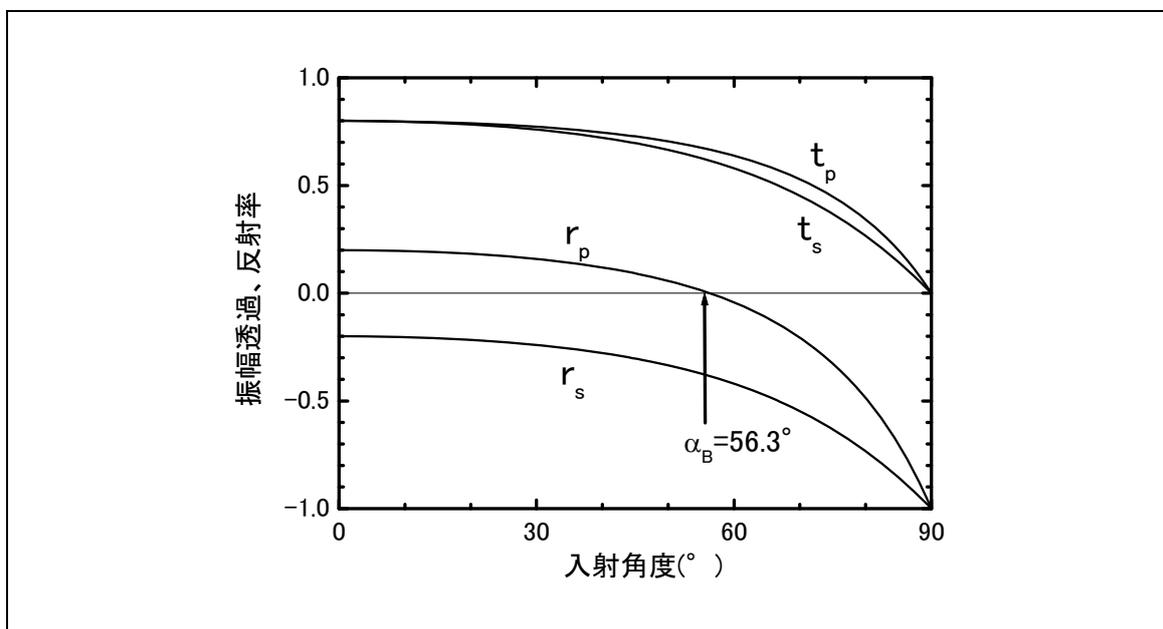


図4. $n_1=1.0$ 及び $n_2=1.5$ の場合の振幅透過率 t 、振幅反射率 r の入射角依存性。添え字の s は s 偏光、 p は p 偏光成分を表す。

さて、次に光の強度反射率、強度透過率も求めておこう。光のエネルギーの流れはポインティングベクトルで表され、強度（単位時間に単位面積を通過するエネルギー）は (24) 式で表されることを示した。入射するエネルギーの束は連続するので

$$\frac{1}{Z_1} E^2 \cos \alpha = \frac{1}{Z_1} E'^2 \cos \alpha + \frac{1}{Z_2} E''^2 \cos \beta \quad (46)$$

の関係が成り立つ。したがって、強度反射率、強度透過率は s 偏光、 p 偏光のそれぞれの場合について、

$$R_s = \left(\frac{E'_s}{E_s} \right)^2 = r_s^2 = \left(\frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \right)^2 \quad (47)$$

$$T_s = \left(\frac{E''_s}{E_s} \right)^2 \cdot \frac{\cos \beta / Z_2}{\cos \alpha / Z_1} = t_s^2 \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} = \frac{4n_1 n_2 \cos \alpha \cos \beta}{(n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta)^2} \quad (48)$$

$$R_p = \left(\frac{E'_p}{E_p} \right)^2 = r_p^2 = \left(\frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \right)^2 \quad (49)$$

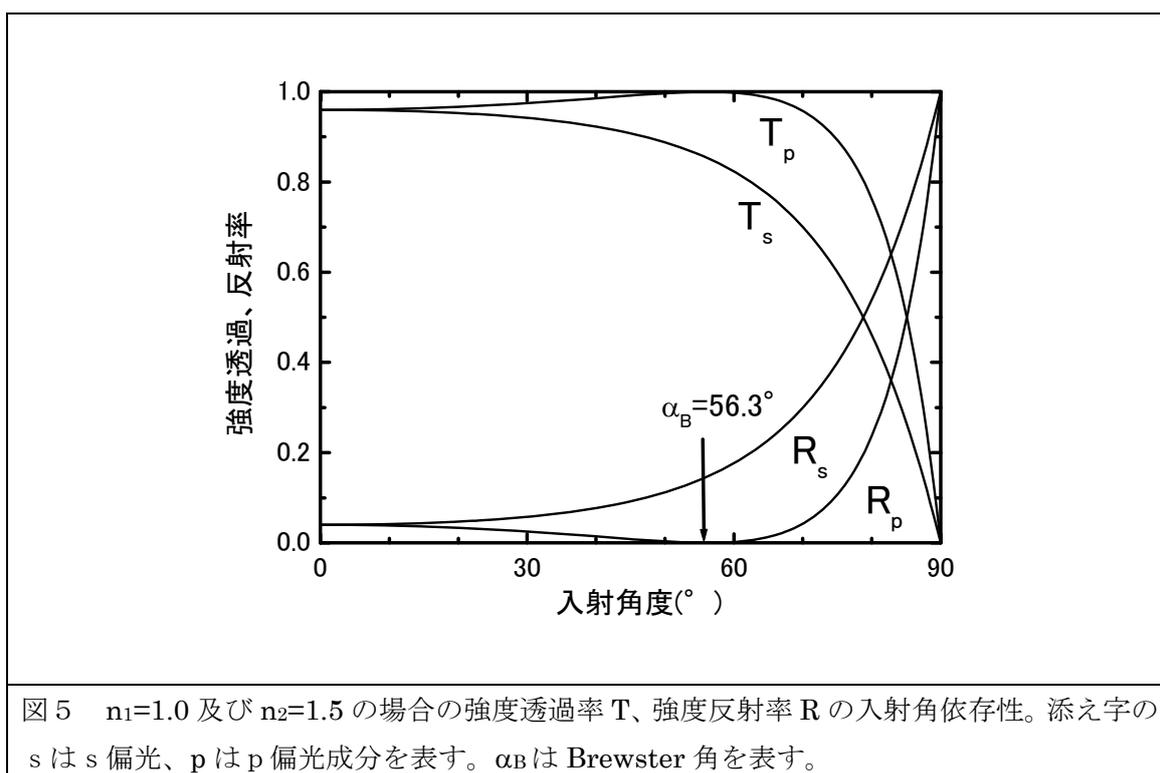
$$T_p = \left(\frac{E_p''}{E_p} \right)^2 \cdot \frac{\cos \beta / Z_2}{\cos \alpha / Z_1} = t_p^2 \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} = \frac{4n_1 n_2 \cos \alpha \cos \beta}{(n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta)^2} \quad (50)$$

ここで強度反射率は振幅反射率の自乗で与えられるが（入射角と反射角が等しいため）、強度透過率は屈折角が入射角と異なっているため、振幅透過率の自乗とは違う値になっていることに注意してほしい。実際の計算では振幅透過率を計算し、その自乗として強度反射率 R を求め、 $T=1-R$ の関係を用いて強度透過率を計算すると計算しやすい。

入射角がゼロの場合は

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad (51)$$

となる。強度反射率、強度透過率を s 偏光、p 偏光のそれぞれについて、やはり $n_1=1.0$ 、 $n_2=1.5$ の場合について入射角度依存を計算したものが図 5 である。



< Brewster 角 >

図 5 から分かるように p 偏光の場合はある入射角度 α_B で反射率がゼロになる。これは入射角と屈折角の和が 90 度になるところで起こる。すなわち

$$\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2} \quad (52)$$

この条件を満たす入射角は Brewster 角と呼ばれ、反射光線が直線偏光を作り出したり、

レーザー光を無反射で光学窓に入射させたりするときなどに利用される。

<全反射>

図5では $n_1=1.0$ 及び $n_2=1.5$ の場合の強度透過率、強度反射率を示したが、 $n_1=1.5$ 及び $n_2=1.0$ の場合、すなわち反対側から光が入射した場合の強度透過率、強度反射率を図6に示す。図5の場合同様に Brewster 角 α_B で p 偏光成分の反射率はゼロになるが、ある入射角以上ではどの偏光成分も反射率が1 (全反射) になっている。全反射を起こす最小の角度を臨界角 α_c と呼んでいる。臨界角は

$$\sin \alpha_c = \frac{n_2}{n_1} \tag{53}$$

で与えられる。臨界角以上では電磁界の媒質境界面内での電磁界の連続性が保てなくなり、電磁界は媒質2へ伝播することができない(透過率が虚数になるので、媒質2に入射した光は波長程度の距離で急激に減衰する)。全反射では振幅の減衰はなく、強度反射率は1になるが、反射波の位相は入射波に対して変化する。位相のとびは p 偏光、s 偏光についてそれぞれ、

$$\tan \frac{\theta_p}{2} = -\frac{n_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}}{n_2^2 \cos \alpha} \tag{54}$$

$$\tan \frac{\theta_s}{2} = -\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2}}{n_1 \cos \alpha} \tag{55}$$

で与えられる。

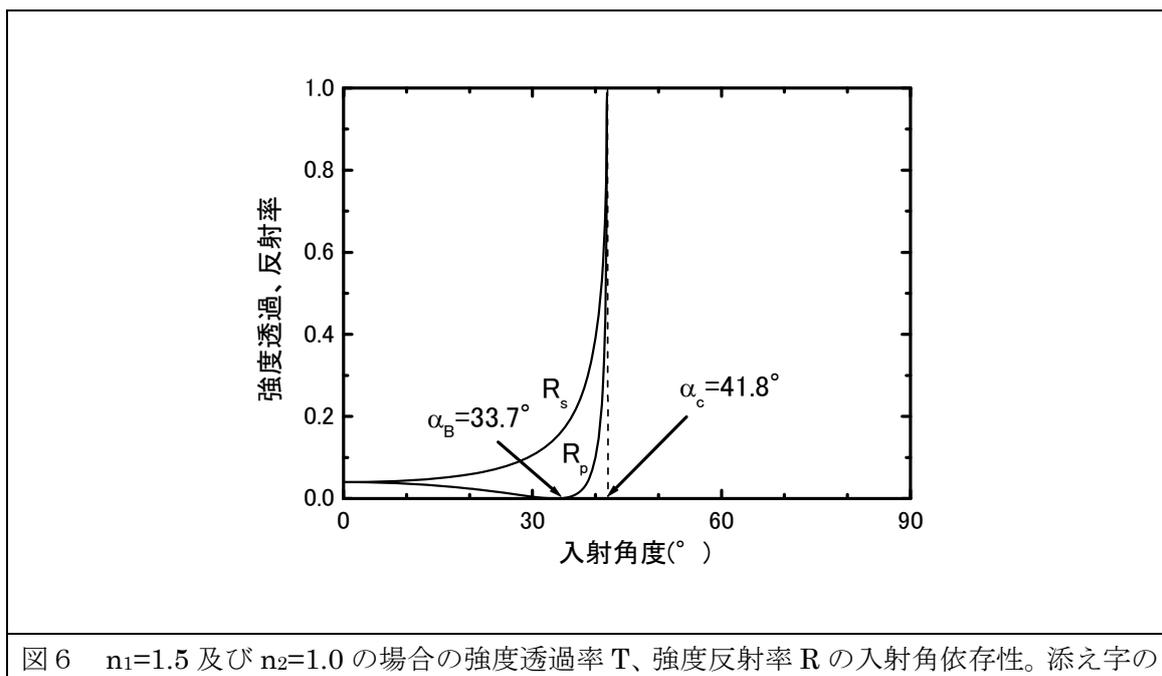
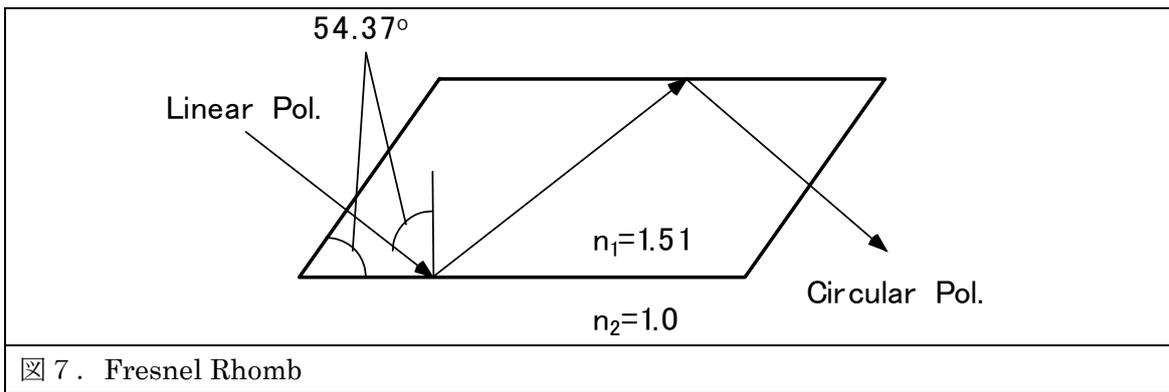


図6 $n_1=1.5$ 及び $n_2=1.0$ の場合の強度透過率 T 、強度反射率 R の入射角依存性。添え字の

s は s 偏光、p は p 偏光成分を表す。 α_B は Brewster 角を表し、 α_c は全反射が起こる臨界角を表す。

全反射での p 偏光と s 偏光の位相差が $\pi/2$ となるように、入射角と媒質屈折率を利用して直線偏光を円偏光に変えることができる。この原理を利用した光学素子が Fresnel rhomb である(図 7)。Fresnel rhomb ではガラスと空気の屈折率差が小さく、全反射時の位相差も小さいので内部で光線が 2 回全反射するように設計されている。



< Evanescent 波 >

全反射では電磁波のエネルギーは媒質の境界面ですべて反射されるが、その一部はわずかに媒質 2 のほうに染み出し、表面波を形成する。いま波面が y 軸 ($x-y$ 面が境界面) に平行な平面波が媒質 1 から 2 へ臨界角よりも大きな角度で α で入射するとする。媒質 2 への透過振幅 T_0 、屈折角を β とすると媒質 2 に染み出した電磁波は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
 E(x, y, z) &= T_0 \exp[i\{\omega t - k_2(x \sin \beta + z \cos \beta)\}] \\
 &= T_0 \exp\left[i\omega t - ik_2 x \frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} \pm k_2 z \sqrt{\frac{n_1^2 \sin^2 \alpha}{n_2^2} - 1} \right], \tag{56}
 \end{aligned}$$

ここで $k_2 (= 2\pi/\lambda_2)$ は媒質 2 での波数の大ききで、最後の式は全反射の場合の Fresnel の公式を用いて変形した。この式をみると、指数の第 1 項は時間的な振動を、第 2 項はこの平面波が x 軸方向すなわち、媒質境界面に沿って伝播する波であることを示している。さらに第 3 項はこの波が z とともに減衰または増大することを示している。第 3 項が正符号を取るとすると波が無限に増大することになるので、物理的に意味のある負符号の場合をとると、この波は媒質中での波長 λ_2 程度で z 方向に減衰する波を表していることになる。このような電磁波を表面波または Evanescent 波と呼んでいる。(56)式によれば表面波の波長は

$$\lambda_{evan} = \frac{n_2 \lambda_2}{n_1 \sin \alpha} = \frac{\lambda_1}{\sin \alpha} \tag{57}$$

で与えられ、その位相速度は

$$v_{evan} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda_{evan} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\lambda_1}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{\sin \alpha} \tag{58}$$

で与えられる。このことは表面波の波長と位相速度は媒質 1 での値よりの $1/\sin\alpha$ だけ大きくなり、媒質 2 の性質には依存しないことを示している。しかし $\sin \alpha > \sin \alpha_c = n_2 / n_1$ したがって $1 > n_2 / (n_1 \sin \alpha)$ なので媒質 2 での波長あるいは位相速度よりも大きくはならない。また表面波は界面に沿って伝播するが、伝播方向(x 軸)にも電界成分を持っている。

1. 4 干渉と回折

<干渉>

2つまたは2つ以上の光波を重ね合わせると、それぞれの波の位相関係によって、互いに強めあったり、弱めあったりして、結果としての強度分布はこの干渉の結果、それぞれの強度分布を単純に重ね合わせたものとは大きく異なったものになる。干渉現象は互いに位相関係が固定された光波間、たとえば同一光源から放射された 2 光波間で生じ、位相関係の定まらない光源からの光波同士では起こらない（重ね合わせた強度分布はそれぞれの強度分布を単純に重ね合わせたものになる）。干渉は波長の異なる光束間でも観測されるが、波長差が大きいほど、干渉が観測される空間的領域は限定され、観測されにくくなる。たとえば、白色光の 2 光束干渉の場合は、光路長が等しいところで非常に鋭い光強度ピークが観測されるが、それ以外の領域では光強度は一定で干渉パターンは観測されない。干渉現象は光学素子の平面度や平行度などを測定したり、星の視野角を求めるのに使われたりする。特に後で説明する等傾角干渉では透過率が特定の波長でピークを持ったり、反射率が低下したりすることを利用して、干渉フィルターや干渉分光計、反射防止膜などに応用されている。光波の干渉パターン(インターフェログラム)が波長に依存することを利用して、干渉を白色光の分光に応用したものがフーリエ分光器である。

干渉は 2 光波によるものと多光波によるものに大別できるが、それぞれの場合の干渉の種類と対応する現象（または実験）について表 2 にリストした。

表 2.

	干渉の種類	現象
2 光波	2 重スリット	Young の干渉実験 マイケルソンの天体干渉計
	振幅分割	平行平板内の 2 重反射による干渉
	等傾角干渉	Haidinger の干渉縞
	等厚干渉	Fizeau の干渉縞 Newton リング
多光波	多重スリット	回折格子
	繰返し反射干渉	Fabry-Perot エタロン 干渉フィルター 反射防止膜

本節では、多光波干渉を応用した Fabry-Perot 干渉計（エタロン）、干渉フィルター、反射防止膜を取り上げ以下に説明する。

A. Fabry-Perot 干渉計

いま図7のごとく空気中に置かれた屈折率 n 、厚さ h の 1 枚の平行平板の両面による多重反射による干渉を考える。板は一様で吸収や分散がないものとする。

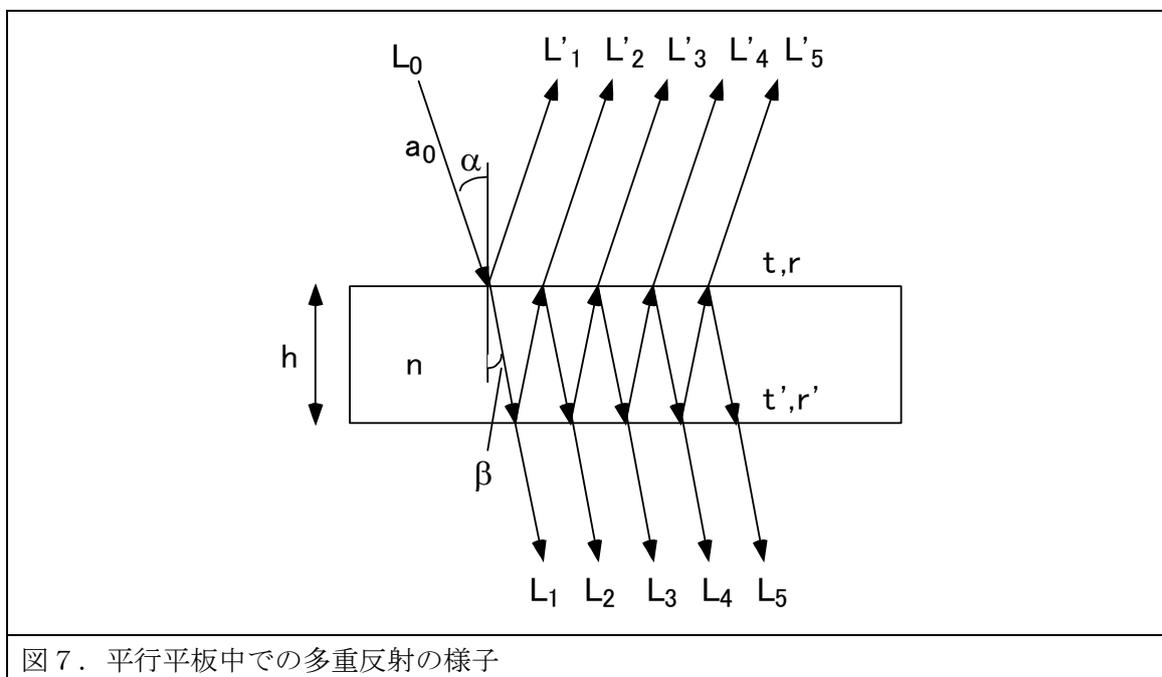


図7. 平行平板中での多重反射の様子

光線は板内部で多重反射し、一部は光線 L'_1, L'_2, L'_3, \dots となって反射され、また一部は光線 L_1, L_2, L_3, \dots となって透過する。空気側から板へ入射する光線に対する振幅透過率、振幅反射率をそれぞれ、 t, r 、板内部から空気への振幅透過率、振幅反射率をそれぞれ、 t', r' 、とする。入射光線の波長 λ 、振幅 a_0 、入射角 α 、屈折角 β とすると、透過光線 L_1, L_2, L_3, \dots の振幅はそれぞれ $a_0 t t'$, $a_0 t t' (r'^2)$, $a_0 t t' (r'^2)^2, \dots$ で、隣接する光線間の位相差は

$$\delta = \frac{4\pi n h \cos \beta}{\lambda} \quad (60)$$

で与えられる。全透過光線の複素振幅 a_t は各透過光線の振幅をすべて加え合わせたものなので、

$$\begin{aligned} a_t &= a_0 t t' + a_0 t t' r'^2 \exp(i\delta) + a_0 t t' r'^4 \exp(i2\delta) + a_0 t t' r'^6 \exp(i3\delta) + \dots \\ &= \frac{a_0 (1 - r'^2)}{1 - r'^2 \exp(i\delta)} \end{aligned} \quad (61)$$

で与えられる ($r'^2 \exp(i\delta)$ を冪とする無限等比級数)。ここで $t t' = 1 - r^2$, $r'^2 = r^2$ ($r' = -r$) (Stokes の定理) を利用した。

したがって透過光の強度は

$$I_{t=} = |a_t|^2 = \frac{a_0^2(1-r^2)^2}{1+r^4-2r^2\cos\delta} = \frac{a_0^2(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\delta} = \frac{a_0^2}{1 + \frac{4R\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(1-R)^2}} \quad (62)$$

で与えられ($r^2=R$ とした)、入射強度 $I_a=a_0^2$ に対する透過強度 I_t の比を取ると

$$T_F = \frac{I_t}{I_a} = \frac{1}{1 + \frac{4R\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(1-R)^2}} \quad (63)$$

となる。強度透過率 T_F の値を、 R をパラメーターとし、隣り合う光線間の位相差 δ の関数としてグラフを描いたものを図 8 に示す。

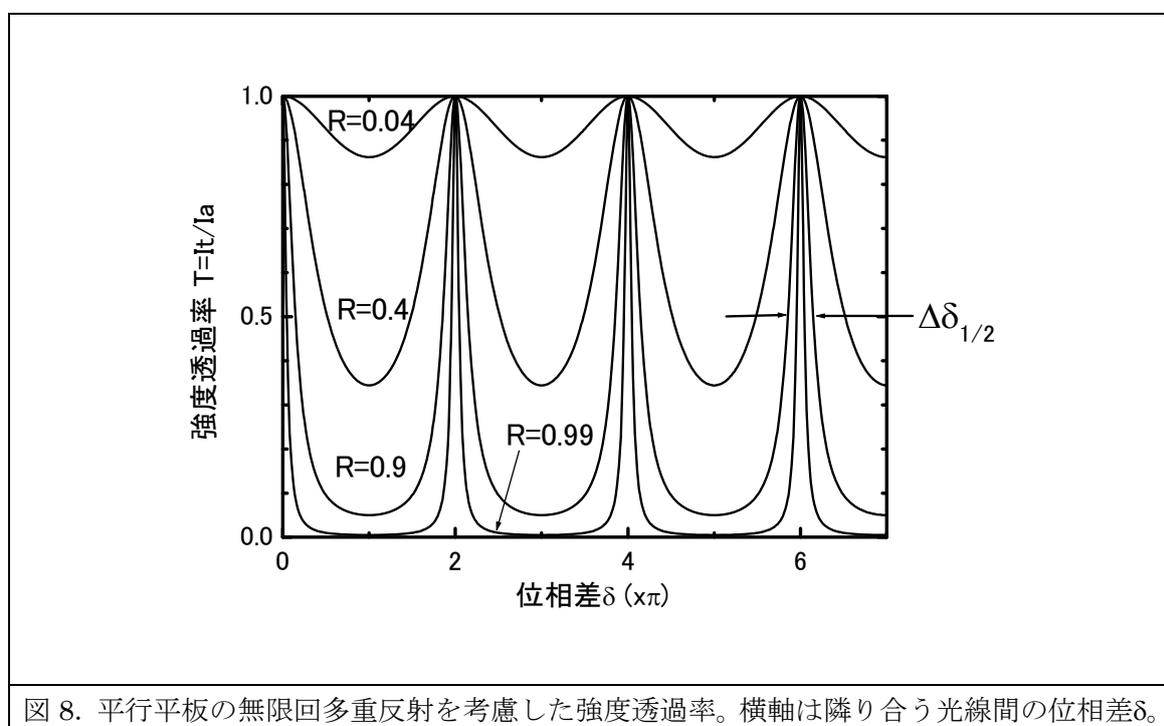


図 8. 平行平板の無限回多重反射を考慮した強度透過率。横軸は隣り合う光線間の位相差 δ 。

図 8 のグラフから以下のことが分かる。

- (1) 透過率は $\delta=2m\pi$ のところに極大をもつ (m は干渉の次数を表す整数)。
- (2) 端面反射率 R が大きいほど (1 に近いほど)、透過率のピーク以外での透過率が下がり、ピークの幅は狭くなる。
- (3) 透過率ピークは端面反射率 R にかかわらず 1 である (吸収ロスが無い場合)。

反射光の強度 I_r についても同様に計算できるが、板の内部及び界面で吸収や損失がないとすれば、エネルギー保存則 ($I_t+I_r=I_a$) から簡単に計算できる。反射光強度の入射光強度に対する比は、したがって

$$R_F = \frac{I_r}{I_a} = \frac{I_a - I_t}{I_a} = 1 - \frac{I_t}{I_a} = \frac{4R \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(1-R)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4R \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(1-R)^2}} \quad (64)$$

で与えられる。 $R_F (= 1 - T_F)$ のグラフは 8 図の縦軸を逆にしたものとなる。

以上は空気中の平行平板の場合だが、2 枚の屈折率 n の板に挟まれた空気層の場合も同じ式が得られる（ただし位相差 δ を計算する場合の n は空気の屈折率を用いる）。

多重反射による干渉縞の鋭さを表すのに干渉縞のピーク強度の半値幅 $\Delta\delta_{1/2}$ を用いる（図 8 参照）。(63)式に $\delta = \Delta\delta_{1/2}/2$ を代入し、1/2 に等しいと置いて、

$$\frac{1}{1 + \frac{4R \sin^2\left(\frac{\Delta\delta_{1/2}}{4}\right)}{(1-R)^2}} = \frac{1}{2} \quad (65)$$

から、 $\sin(\Delta\delta_{1/2}/4) \sim \Delta\delta_{1/2}/4$ ($\ll 1$) の近似を用いて $\Delta\delta_{1/2}$ について解くと

$$\Delta\delta_{1/2} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \quad (66)$$

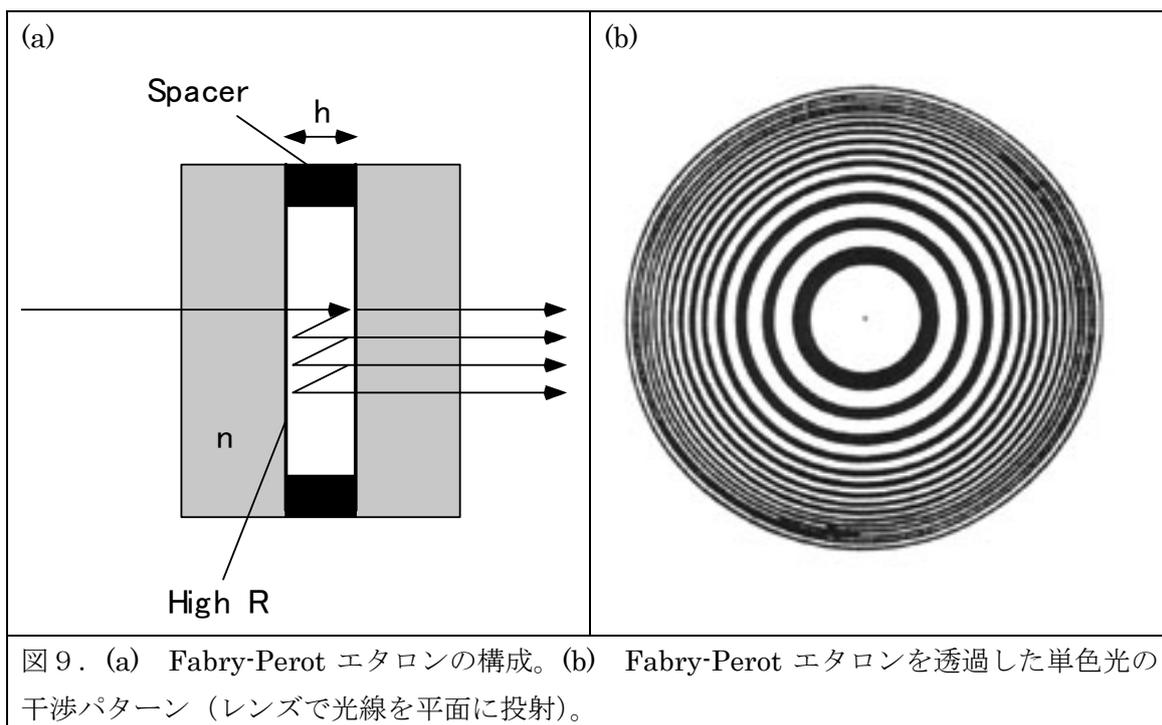
このように干渉縞の幅は端面反射率 R で決まり、 R が大きくなるほど線幅 $\Delta\delta_{1/2}$ は細くなる。干渉縞の間隔と干渉縞の半値幅の比をフィネス (Finesse) と呼び、これを F とすると

$$F = \frac{2\pi}{\Delta\delta_{1/2}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \quad (69)$$

このフィネスが大きいほど、干渉縞の間隔に対して縞の幅が鋭い。図 8 の縞の位置は位相差に対応しているが、位相差は(60)式をみれば分かるように、平行平板の厚さと屈折率を固定して考えた場合は、波長の逆数に対応している。したがって、干渉縞のピークの位置を読み取ることにより、入射光線の波長を読み取ることができる。このときの読み取り精度はフィネスが高いほど良くなる。このことから干渉縞は分光素子として利用できる。代表的な例として Fabry-Perot エタロンがある。これは図 9(a)のように 2 枚の平行平板を、空間を空けて平行に置き、内側の面に高い反射率を持たせたものである。

図 9(b)は Fabry-Perot エタロンを透過した光線をレンズで絞り、スクリーンに投射したときの干渉縞のパターンである（平行光のままでは無限遠に干渉縞が投射される）。同心円状の干渉縞が観測されるが、この縞の位置を読み取ることにより、入射光の波長を読み取ることができる。

干渉縞による波長読み取り分解能を求めてみよう。位相のずれ $\Delta\delta$ と波長のずれ $\Delta\lambda$ の関係



は(60)式より(空気中での多重反射なので $n=1$ とおく)

$$\Delta\delta = -\frac{4\pi h \cos \beta}{\lambda^2} \Delta\lambda \quad (70)$$

で与えられ、 m 次の干渉縞においては $\delta_m=2\pi m$ より、

$$\Delta\delta_m = -\frac{4\pi h \cos \beta}{\lambda_m^2} \Delta\lambda_m = -\frac{\delta_m}{\lambda_m} \Delta\lambda_m = -\frac{2m\pi}{\lambda_m} \Delta\lambda_m \quad (71)$$

が得られる。この位相のずれが干渉縞の半値幅 $\Delta\delta_{1/2}$ と等しくなるときが分解の限界とすると、 $\Delta\delta_{1/2}$ に対する(66)式を用いて

$$\Delta\delta_{1/2} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} = -\frac{2m\pi}{\lambda_m} \Delta\lambda_m \quad (72)$$

が得られる。したがって Fabry-Perot エタロンによる干渉縞の波長分解能は

$$\frac{\lambda_m}{\Delta\lambda_m} = \frac{m\pi\sqrt{R}}{(1-R)} = mF \quad (73)$$

で与えられる。ここで F はエタロンのフィネスである。すなわち分解能は次数 m とフィネスの積で与えられる。エタロンの場合のように等傾角干渉では、(70)式から見て取れるように、傾角が小さく、観測面の中心に近いところの干渉縞 (図 9(b)では一番中心に近い干渉リング) が最高次数の干渉によるものであり、もっとも高い分解能を与える。また隣り合う干渉縞間の周波数差 Δf_{FSR} は

$$\begin{aligned} \Delta f_{FSR} &= f_m - f_{m-1} = \frac{c}{\lambda_m} - \frac{c}{\lambda_{m-1}} = \frac{c}{4\pi h \cos \beta} (\delta_m - \delta_{m-1}) \\ &= \frac{c}{4\pi h \cos \beta} (2\pi m - 2\pi(m-1)) = \frac{c}{2h \cos \beta} \end{aligned} \quad (74)$$

で与えられ、自由スペクトル領域(Free Spectral Range, FSR と略す)と呼ばれる。

B. 干渉フィルター

先に議論した Fabry-Perot エタロンによる干渉では、通常平行平板の厚さ h が比較的大きく自由スペクトル領域 FSR がそれほど大きくない。したがって白色光またはスペクトル広がり大きい光に対して m 次の波長のみだけでなく、 $(m-1)$ 次や $(m+1)$ 次の波長も透過するので、 m 次の波長のみを選択するためには Fabry-Perot エタロンの FSR より帯域の狭いバンドパスフィルターなどを併用する必要がある。1 層の等傾角干渉において FSR を大きくとるためには、多重反射の起こる層をできるだけ薄くする必要がある。Fabry-Perot エタロンと同様の原理を用いるが、干渉する層の厚さを非常に薄くして FSR を広げることにより、等傾角干渉を 1 波長選択用のフィルターとして応用したものが干渉フィルターである。

干渉フィルターの構造を模式的に示したものが図 10 である。干渉フィルターはガラスや石英などの基板の上に作られた誘電体薄膜 (厚さ h 、屈折率 n) で、薄膜の両端面は金属や誘電体多層膜を蒸着し反射率(強度反射率= R)を高めている。

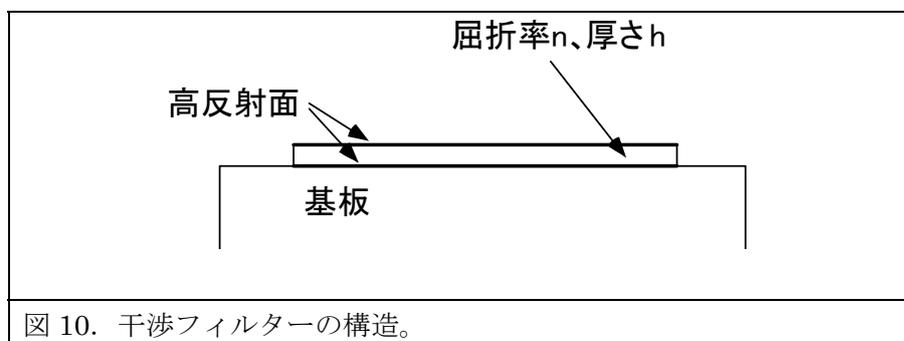


図 10. 干渉フィルターの構造。

アルミや金などを蒸着して高反射面を作る方法は比較的簡単であるが、金属面での反射のロスや、位相変化などのため、干渉縞の透過率ピークが低下したり、ピークの幅が広くなったりするなど理想的な性能を得ることが難しい。一方、誘電体多層膜により高反射膜を作る方法は高精度の膜圧の制御など、より高度な製作技術が要求されるが、吸収ロスが少なく非常に高い反射率を得ることが可能で、干渉フィルターとしても性能の良いものが得られる。

いま透過させたい波長を λ_m とすると、薄膜の光学的厚さ nh は(60)式から

$$nh = \frac{\delta_m \lambda_m}{4\pi \cos \beta} = \frac{(2m\pi)\lambda_m}{4\pi \cos \beta} = \frac{m\lambda_m}{2 \cos \beta} \quad (75)$$

で与えられる。垂直入射の場合は

$$nh = \frac{m\lambda_m}{2} \quad (76)$$

したがって、垂直入射の場合の薄膜の光学的厚さは、フィルター波長 λ_m の1/2の整数倍である必要がある。

透過ピークでの波長は

(75)式から

$$\lambda_m = \frac{2nh}{m} \cos \beta \quad (77)$$

で与えられる。透過ピークでの波長の入射角依存はこの式を角度 α で微分すると

$$\frac{d\lambda_m}{d\alpha} = \frac{d\beta}{d\alpha} \frac{d\lambda_m}{d\beta} = -\frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} \frac{2nh}{m} \sin \beta = -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \frac{2h}{m} \sin \beta \quad (78)$$

ここで $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ の関係を用いた。入射角 α が小さい場合、 $\cos \alpha / \cos \beta \sim 1$, $\sin \beta \sim \beta \ll 1$ なので、透過波長の入射角度依存は小さいことがわかる。しかし、入射角度が大きくなると波長の入射角度依存は大きくなる。したがって、干渉フィルターは入射角度を変化させることにより波長可変フィルターとして利用することが可能である。

干渉フィルターはここで述べた単層のものだけでなく、多層膜のものや、反射型のものなどがあり、バンドパスフィルター（ハイパス、ローパスを含む）や、ノッチフィルター（特定の波長だけ反射する）などとして利用されている。

C. 反射防止膜 (Anti-Reflection Coating)

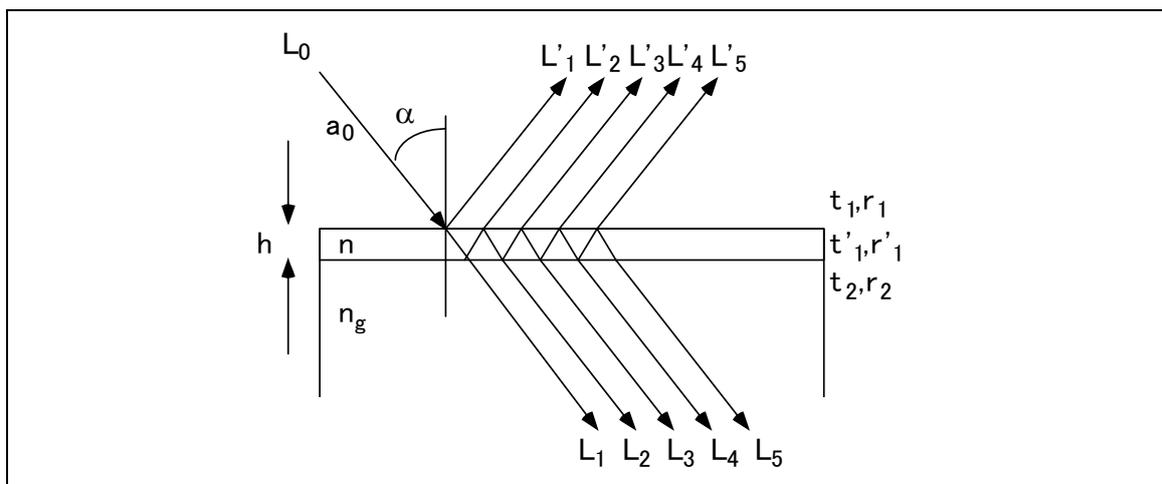


図 12. 反射防止膜の構造。

空気中におかれたガラス（または一般に誘電体）の表面では垂直入射の場合でも光は約 $4\%=(1.5-1)^2/(1.5+1)^2$ 反射される。しかしガラス表面に、先に述べた単層の干渉フィルターのよう薄膜を形成し、その膜厚と屈折率を制御することにより、反射率をほぼゼロにすることが可能である。このような膜を反射防止膜(Anti-Reflection Coating)という。いま図 12 に示すように空気中に置かれたガラスなどの透明物質（屈折率を n_g とする）の表面に、透明な薄膜が厚さ h で蒸着されている場合を考える（干渉フィルターの場合のように両端面は高反射率ではない）。空気側から薄膜への振幅透過率、反射率を t_1, r_1 、薄膜側から空気への振幅透過率、反射率を t'_1, r'_1 、薄膜からガラスへの振幅透過率、反射率を t_2, r_2 とすると（これまで同様に入射角は α 、隣接する光線間の位相差は δ で表す）、空気中へ反射される全光線を足し合わせた複素振幅は

$$a_r = a_0 r_1 + a_0 t_1 t'_1 r_2 \exp(i\delta) + a_0 t_1 t'_1 r_1 r_2^2 \exp(i2\delta) + a_0 t_1 t'_1 r_1^2 r_2^3 \exp(i3\delta) + \dots$$

$$= \frac{a_0 (r_1 + r_2 \exp(i\delta))}{1 + r_1 r_2 \exp(i\delta)} \quad (79)$$

となる。ここで Stokes の定理、 $r'_1 = -r_1, t_1 t'_1 = 1 - r_1^2$ の関係を用いた。

したがって反射光の強度は

$$I_r = |a_r|^2 = a_0^2 \frac{r_1 + r_2 \exp(i\delta)}{1 + r_1 r_2 \exp(i\delta)} \cdot \frac{r_1 + r_2 \exp(-i\delta)}{1 + r_1 r_2 \exp(-i\delta)}$$

$$= a_0^2 \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta}{1 + (r_1 r_2)^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta} \quad (80)$$

で与えられる。 $r_1 = r_2$ の場合（振幅条件）

$$I_r = a_0^2 \frac{2r_1^2 (1 + \cos \delta)}{1 + r_1^4 + 2r_1^2 \cos \delta} \quad (81)$$

となる。また、さらに $\delta = (2m-1)\pi$ という条件(位相条件)を加えると、 $\cos \delta = -1$ であるから、 $I_r = 0$ 、すなわち反射光の強度がゼロになる。

入射角がゼロ（垂直入射）、特定の波長を λ_0 、この波長に対する薄膜及び基板の屈折率をそれぞれ n_0, n_g とすると、

$$r_1 = \frac{1 - n_0}{1 + n_0}, \quad r_2 = \frac{n_0 - n_g}{n_0 + n_g} \quad (82)$$

なので、振幅条件 $r_1 = r_2$ を満たすためには

$$\frac{1 - n_0}{1 + n_0} = \frac{n_0 - n_g}{n_0 + n_g} \quad (83)$$

なので、 n_0 について解くと

$$n_0 = \sqrt{n_g} \tag{84}$$

が得られる。また、位相条件 $\delta=(2m-1)\pi$ を満たすためには

$$\delta = (2m-1)\pi = \frac{4\pi n_0 h}{\lambda_0} \tag{85}$$

となる。したがって、 $m=1$ に対しては膜の光学的厚みとして

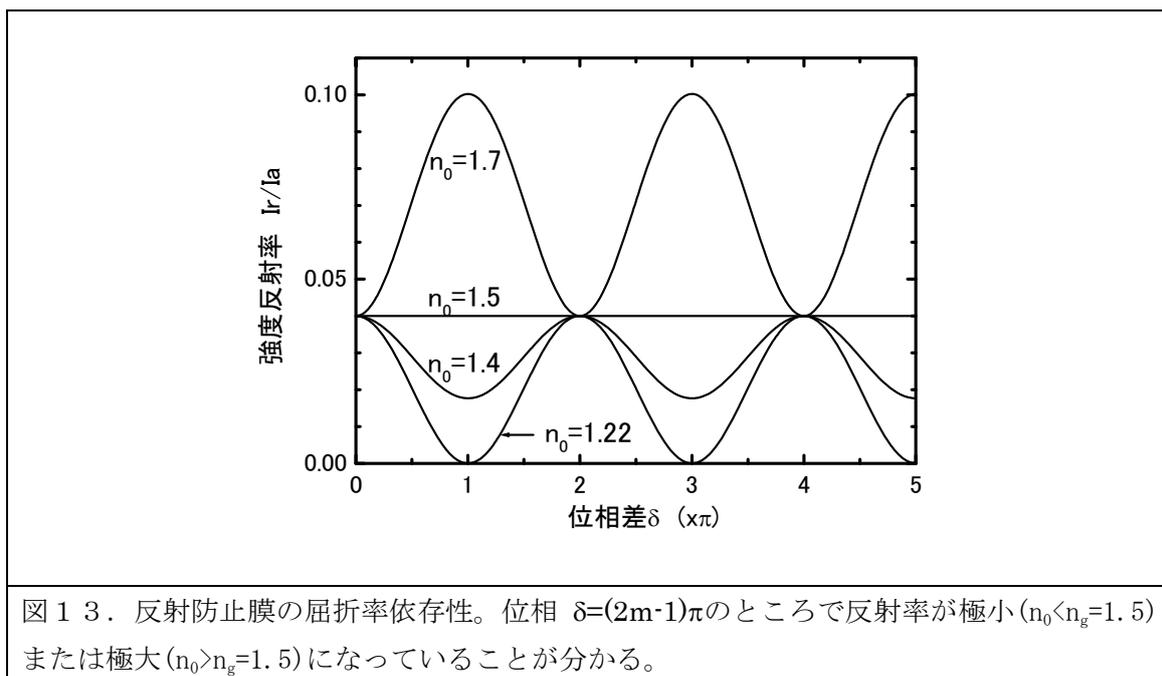
$$n_0 h = \frac{\lambda_0}{4} \tag{86}$$

が得られる。したがって、反射率をゼロにするためには

- (1) 薄膜の屈折率が基板の屈折率の平方根になるように材料を選ぶ。
- (2) 膜の光学厚さが波長 λ_0 の 1/4 になるように蒸着する。

と良いことが分かる。通常 1 層の反射防止膜では波長 λ_0 からずれるにつれ、反射率が上がり、あまり広い波長領域で反射率を低減させることが困難である。そこで多層膜構造にして反射防止膜の広帯域化が図られている。

図 13 にガラス基板上($n_g=1.5$)に反射防止膜を形成したときの強度反射率の屈折率依存性を示す。 $n_0 = \sqrt{n_g} = \sqrt{1.5} = 1.22$ のとき $\delta=(2m-1)\pi$ において反射率がゼロになっていることが分かる。また、 $n_0 > n_g = 1.5$ では逆に反射率が増加しているのが分かる。この反射率増強効果は高反射率の誘電体ミラーを作製するのに利用されている（高反射率を得るためには多層膜化する）。



<回折>

最初 Huygens によって提唱された光の波動説は Fresnel、Kirchhoff などによりより数学的に精密な形で定式化された。本節では回折の基本原理である、Helmholtz-Kirchhoff の積分定理を与え、ついで、適当な仮定のもとに Helmholtz-Kirchhoff の積分定理を単純化した、Fresnel-Kirchhoff の回折積分を導出する。Fresnel-Kirchhoff の回折積分を用いれば任意の光学的開口からの回折パターンを求めることができる。開口から比較的近い場合の回折を Fresnel 回折、非常に遠い場合の回折を Fraunhofer 回折といい、それぞれについて具体例を交え解説する。回折効果は光学系の空間分解能を決める上で重要である。また、ホログラフィーなどにも応用される。

A. Helmholtz-Kirchhoff の積分定理

平面波を表す(14)式を電磁波に関する波動方程式(10)に代入し、空間部分について考えると、

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 + \varepsilon\mu\omega^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E}_0 + k_z^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial t^2} = 0 \quad (87)$$

ここで、 $k_z = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/v_z$ の関係を用いた。ベクトル振幅 \mathbf{E}_0 の一成分のみに注目し、これをスカラー量として扱いこれを $\mathbf{E}_0 = \mathbf{u}$ と置くと

$$\nabla^2 u + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (88)$$

と書ける。これは **Helmholtz の方程式** と呼ばれる (添え字 z は省略)。Kirchhoff の回折理論はこの Helmholtz の方程式をもとに数学的に導かれる (したがって Kirchhoff の回折理論のもとにはやはり Maxwell の方程式である。しかし、Kirchhoff の回折理論では電磁波をスカラー波として取り扱っているために、金属開口などの場合のように近接場の影響のある場合や、偏光の効果が無視できない場合など、正確に取り扱えない場合もあることに注意)。Helmholtz の方程式をもとに回折の基本原理である Helmholtz-Kirchhoff の積分定理を導出するためには **Green の定理** というお膳立てが必要になる。グリーン の定理とは次のようなものである。ある閉曲面 S に囲まれた体積 V の中にある任意のスカラー関数 u と v があるとする。それらの関数の 1 次及び 2 次微分が連続であるとき

$$\iiint_V (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v) dV = \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad \boxed{\text{Green の定理}} \quad (89)$$

が成り立つというものである。ここで $\partial/\partial n$ は閉曲面上の点において外向き法線に沿った微分を表している。 v も u 同様電磁波 (スカラー波の光波) であるとする Helmholtz の方程式

$$\nabla^2 u + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (90)$$

を満足する。(88)、(90)式より Green の定理の左辺の体積積分はゼロとなる。したがって、

$$\iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (91)$$

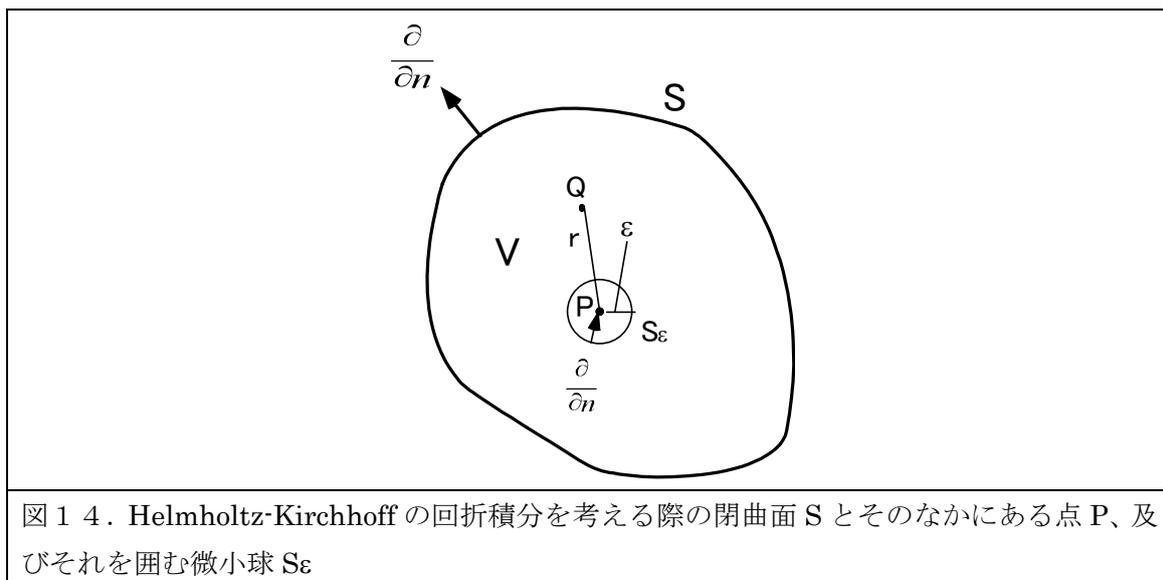


図 1 4. Helmholtz-Kirchhoff の回折積分を考える際の閉曲面 S とそのなかにある点 P、及びそれを囲む微小球 S_ϵ

いま、光波 v を観測点 P から広がってゆく単位振幅の球面波とすると、P から r の距離にある体積内の任意の点 Q においては

$$v(Q) = \frac{\exp(-ikr)}{r} \quad (92)$$

と書ける。この関数は P 点($r=0$)において特異点を持ち Green の定理を満足しなくなるから、P 点を囲む小さな半径 ϵ の球を考えその表面を S_ϵ とすると、S と S_ϵ の間にある体積については(91)が成立するので、

$$\iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_\epsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS_\epsilon = 0 \quad (93)$$

となる。第 2 項の微小球 S_ϵ 表面上での点における外向き法線は P 点に向かっているので、

$$v = \frac{\exp(-ik\epsilon)}{\epsilon} \quad (94)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \left(ik + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{\exp(-ik\epsilon)}{\epsilon} \quad (95)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial \epsilon} \quad (96)$$

と書ける。したがって(93)の S_ϵ に関する積分は

$$\iint_{S_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS_\varepsilon = \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{\exp(-ik\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \left(-\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right) dS_\varepsilon - \iint_{S_\varepsilon} ik \frac{\exp(-ik\varepsilon)}{\varepsilon} u dS_\varepsilon - \iint_{S_\varepsilon} \frac{\exp(-ik\varepsilon)}{\varepsilon^2} u dS_\varepsilon = 0 \quad (97)$$

となる。ここで微小面積 S_ε が点 P に対して張る立体角を $d\Omega$ とすると $dS_\varepsilon = \varepsilon d\Omega$ の関係があり、半径 ε をゼロに近づけた極限では u は $u(P)$ に等しくなると考えて、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \varepsilon^2 \exp(-ik\varepsilon) \left(-\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} - ik \frac{1}{\varepsilon} u - \frac{1}{\varepsilon^2} u \right) d\Omega = -u(P) \iint_{S_\varepsilon} d\Omega = -4\pi u(P) \quad (98)$$

となる。これを(93)に代入して

Helmholtz-Kirchhoff の積分定理

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right\} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) \right\} dS \quad (99)$$

を得る。この式を **Helmholtz-Kirchhoff の積分定理** という。この定理は観測点 P における光波 $u(P)$ は、それを囲む任意の閉曲面 S 上の光波分布 u とその閉曲面の外向き法線方向の微分 $\partial u / \partial n$ とが分かれば求めることができることを意味している。この定理が成り立つためには閉曲面 S 内には光源を含んではならないが、 $v = \exp(-ikr)/r$ とおいた光波は、閉曲面 S 上から P 点に達し、 P 点から再び放射される 2 次波と解釈することができる。

B. Fresnel-Kirchhoff の回折積分

<p>図 15. Fresnel-Kirchhoff の回折積分の導出における開口 S_1</p>	<p>図 16. 開口 S_1 の点 Q (r_0, r が波長 λ に比べ十分大きい場合)</p>

(99)式で示される Helmholtz-Kirchhoff の積分定理は任意の閉曲面上の光波(光源)から、その中にある観測点における光波を求めることを示しているが、実際には図 15 のように光源 P_0 から開口 S_1 を持つ遮光板 Σ で隔てられた観測点 P における複素振幅分布 $u(P)$ を求めることが多い。そこでこのような条件に適合するいくつかの仮定を導入し、有限開口 S_1 からの回折パターンを求める **Fresnel-Kirchhoff の回折積分** を導出しよう。 P を囲む閉曲面 S を考え、これを開口直後の S_1 、遮光板直後の S_2 及び P を中心とした球 S_3 に分ける。これに Helmholtz-Kirchhoff の積分定理を適用するが、 S_3 上での積分は半径を非常に大きくするとゼロになると考えられる。また、遮光板直後の S_2 上では光源からは影になるので、 u も $\partial u / \partial n$ もゼロとみなせるので、 S_2 についての積分もゼロとすることができる。したがって、 S_1 についての積分項だけが残る、

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left\{ \frac{\exp(-ikr)}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) \right\} dS \quad (100)$$

を得る。ここで S_1 上の u と $\partial u / \partial n$ は遮光板の影響を受けないと仮定する。実際には開口付近には微弱な表面波 (Evanescent Wave) が存在し、それによって開口の端をとる光も乱されるが、表面波の影響は開口の端から数波長以内で急速に減衰するで、表面波の影響は開口 S_1 が波長に比べて非常に大きい場合には無視してよい。

図 16 のように左側の点光源 P_0 から開口面 S_1 に達した光波を $u(Q)$ とし、遮光版の右側の点 P において観測される光波 $u(P)$ を(100)式を使って求めてみよう。 $P_0Q=r_0$ とすると S_1 上の $u(Q)$ は

$$u(Q) = a \frac{\exp(-ikr_0)}{r_0} \quad (101)$$

で与えられる。 P_0Q と法線 n とがなす角を θ_0 とし、 r_0 が波長に比べて非常に大きいときは、

$$\frac{\partial u(Q)}{\partial n} = a \cos \theta_0 \left(ik + \frac{1}{r_0} \right) \frac{\exp(-ikr_0)}{r_0} \approx ika \cos \theta_0 \frac{\exp(-ikr_0)}{r_0} \quad (102)$$

となる。同様に P_0Q と法線 n とがなす角を θ とし、 $QP=r$ が波長に比べて非常に大きいときは、

$$\frac{\partial \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right)}{\partial n} = \cos \theta \left(ik + \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(-ikr)}{r} \approx ik \cos \theta \frac{\exp(-ikr)}{r} \quad (103)$$

となる。したがって、(100)式は

Fresnel-Kirchhoff の回折積分

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\exp(-ikr)}{r} \cdot ika \cos \theta_0 \cdot \frac{\exp(-ikr_0)}{r_0} - \frac{a \exp(-ikr_0)}{r_0} \cdot ik \cos \theta \cdot \frac{\exp(-ikr)}{r} dS$$

$$= \frac{ia}{\lambda} \iint_{S_1} \frac{\exp(-ik(r_0 + r))}{r_0 r} \cdot \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)}{2} dS$$

傾斜係数

(104)

と書ける($k=2\pi/\lambda$ を用いた)。この式を **Fresnel-Kirchhoff の回折積分** という。この回折積分式は次のように解釈できる。光源 P_0 から発した光波は開口上の点 Q に達したときにはその複素振幅が $\exp(-ikr_0)/r_0$ となるが、この光波出す 2 次波はその振幅が波長に逆比例 ($1/\lambda$) し、また放射される角度に対して $(\cos \theta_0 - \cos \theta)/2$ という角度依存性 (これを **傾斜係数** という) を持っており、位相に関しては $\pi/2$ だけ遅れたものとなっているとみなせる。したがって、 P に作られる複素振幅は、そのような振幅をもった 2 次波が P 点につくる複素振幅を開口に S_1 にわたって積分したもので得られると解釈できる。

傾斜係数 $(\cos \theta_0 - \cos \theta)/2$ は開口面の広がり比べて、開口面から光源 P_0 、及び観測点 P までの距離が非常に大きく、また開口面は P_0 と P を結ぶ軸上付近にあるときは $(\cos \theta_0 - \cos \theta)/2=1$ で近似できて、

$$u(P) = \frac{ia}{\lambda} \iint_{S_1} \frac{\exp(-ik(r_0 + r))}{r_0 r} dS \quad (\text{傾斜係数を省いた Fresnel-Kirchhoff の回折積分})$$

(105)

と書くことができる。

C. 開口透過率と開口関数

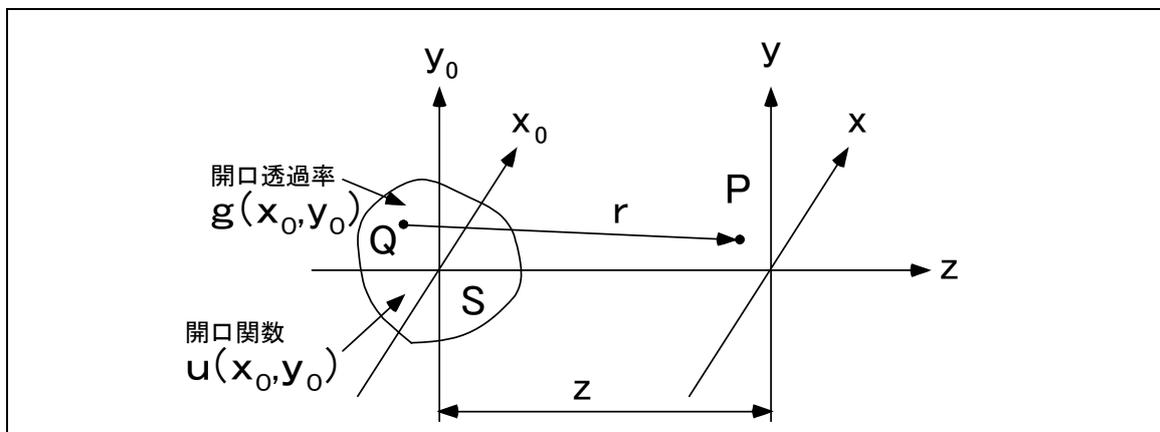


図 1 7. 回折における開口透過率および開口関数

いま開口面に垂直な方向に z 軸をとり、開口面 S 及び開口面に平行な観測面上の点を直交座標 (x_0, y_0) 、及び (x, y) で表すとす (図 1 7)。光源 (波長 λ) は開口面から遠方 (図 1 7 では左側) にあり、開口の広がり及び光源と観測点の z 軸からの距離は観測距離 z に比べて十分小さいとすると、回折積分は傾斜係数を省略した (105) 式で与えられるので、直交座標で積分を書き直すと

$$u(x, y; z) = \frac{ia}{\lambda} \iint_S \frac{\exp(-ik(r_0 + r))}{r_0 r} dx_0 dy_0 \quad (\text{球面波入力の場合}) \quad (106)$$

となる。

もし点光源が無遠慮にあるとすれば、開口面に入射する光波の振幅と位相は一定、すなわち平面波であると考えられるので、この平面波の振幅を a と置きなおすと、

$$u(x, y; z) = \frac{ia}{\lambda} \iint_S \frac{\exp(-ikr)}{r} dx_0 dy_0 \quad (\text{平面波入力の場合}) \quad (107)$$

と表せる。開口において入射波の振幅と位相が変化するような場合 (フィルターなど)、その振幅透過率を表す関数を $g(x_0, y_0)$ とすると一般的に

$$g(x_0, y_0) = |g(x_0, y_0)| \exp(i\phi_g(x_0, y_0)) \quad (\text{開口 } S \text{ 内}) \quad (108)$$

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{開口 } S \text{ 外})$$

と書くことができる。ここで ϕ_g は複素振幅 $g(x_0, y_0)$ の位相である。この開口透過率関数を用いると、回折積分の積分領域を拡張して、球面波と平面波入力のそれぞれの場合について

$$u(x, y; z) = \frac{ia}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{\exp(-ik(r_0 + r))}{r_0 r} dx_0 dy_0 \quad (\text{球面波入力 } \times \text{ 開口透過率}) \quad (109)$$

$$u(x, y; z) = \frac{ia}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{\exp(-ikr)}{r} dx_0 dy_0 \quad (\text{平面波入力 } \times \text{ 開口透過率}) \quad (110)$$

上の式において開口透過直後の光波の複素振幅分布を開口関数と定義し、これを $u(x_0, y_0)$ とすると、回折積分は

$$u(x, y; z) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \frac{\exp(-ikr)}{r} dx_0 dy_0 \quad (\text{開口関数を使った回折積分}) \quad (111)$$

と表すことができる。 $u(x_0, y_0)$ は球面波入力、平面波入力のそれぞれの場合で、(109) 式、(110) 式から

$$u(x_0, y_0) = \frac{ag(x_0, y_0) \exp(-ikr_0)}{r_0} \quad (\text{球面波入力の場合の開口関数}) \quad (112)$$

$$u(x_0, y_0) = ag(x_0, y_0) \quad (\text{平面波入力の場合の開口関数}) \quad (113)$$

D. Fresnel 回折と Fraunhofer 回折

開口からの回折波の分布は開口からの伝播距離によって変化する。この距離が比較的近い場合を **Fresnel 回折**、非常に遠い場合を **Fraunhofer 回折** と呼んで分類している。より正確にいうと、開口上の点 $Q(x_0, y_0, z=0)$ から回折光の観測点 $P(x, y, z)$ の距離

$$r = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}} \quad (114)$$

を $1/z$ のべきで展開し、その第 2 項 ($1/z$ の項) までで近似できる領域を **Fresnel 領域** と呼び、この領域で回折される回折を **Fresnel 回折** と呼んでいる。**Fraunhofer 回折** は Fresnel 回折の場合において、さらに開口の広がりに対して伝播距離 z が非常に大きく、 $z \gg (x_0^2 + y_0^2)_{\max} / \lambda$ が成立する領域 (**Fraunhofer 領域**) での回折をいう。

Fresnel 領域における回折波は(114)式を $1/z$ のべきで展開し、その第 2 項までをとると

$$r = z + \frac{1}{2z} \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\} \quad (115)$$

なので、 $1/r \sim 1/z$ として回折積分(111)式は

Fresnel 回折波

$$u(x, y) = \frac{i \exp(-ikz)}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left(-\frac{ik}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right) dx_0 dy_0 \quad (116)$$

と表すことができる。この式は **Fresnel 回折波** が積分の外の定数を除くと、開口関数 $u(x_0, y_0)$ と $\exp(-ik(x^2 + y^2)/2z)$ とのコンボリューションで与えられていることを示している。

つぎに **Fresnel 領域** よりもさらに伝播距離 z が大きい場合を考える。**Fresnel 回折波** の(116)式を変形して、積分に関係ない項を外に出すと、

$$u(x, y) = \frac{i \exp(-ikz) \exp\left\{-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right\}}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left\{-\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right\} \exp\left\{\frac{ik}{z}(xx_0 + yy_0)\right\} dx_0 dy_0 \quad (117)$$

と書ける。積分の中の第 1 項の指数関数は、開口の広がりに対して伝播距離 z が非常に大きい場合、すなわち

$$\frac{k}{2z} (x_0^2 + y_0^2)_{\max} \ll 2\pi \quad (118)$$

のときは、この指数項を無視でき、(117)式は

Fraunhofer 回折波

$$u(x, y) = \frac{i \exp(-ikz) \exp\left\{-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right\}}{\lambda z} \int \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{ik}{z}(xx_0 + yy_0)\right\} dx_0 dy_0 \quad (119)$$

と近似できる。これが Fraunhofer 回折を与える回折積分であり、(117)の式が成り立つ領域を Fraunhofer 領域という。Fraunhofer 回折は Fresnel 回折の z が非常に大きい特殊な場合であるといえる。

Fresnel 領域と Fraunhofer 領域が具体的に開口からどのくらい離れた領域を指すのか検討してみよう。Fresnel 領域では r に関する展開の $1/z^2$ 以上の高次項 (δr とする) を無視するので、

$$k\delta r \approx \frac{2\pi}{8z^3\lambda} \left\{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right\}_{\max}^2 \ll 2\pi \quad (\text{Fresnel 領域}) \quad (120)$$

$$\rightarrow z^3 \gg \frac{1}{8\lambda} \left\{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right\}_{\max}^2$$

を得る($k=2\pi/\lambda$ を用いた)。いま直径 1cm の開口があり、波長 500nm の光が回折される場合、数 cm 程度の広がり観測面を仮定すると、(119)式によれば z は約 1m 以上である必要がある。一方、Fraunhofer 領域では(118)式、すなわち

$$z \gg \frac{1}{2\lambda} (x_0^2 + y_0^2)_{\max} \quad (\text{Fraunhofer 領域}) \quad (121)$$

が成り立つ。同様に、直径 1cm の開口があり、波長 500nm の光が回折されるとすると、 z は 25m 以上でなければならない。

それぞれの回折領域を図 18 に模式的に示した。

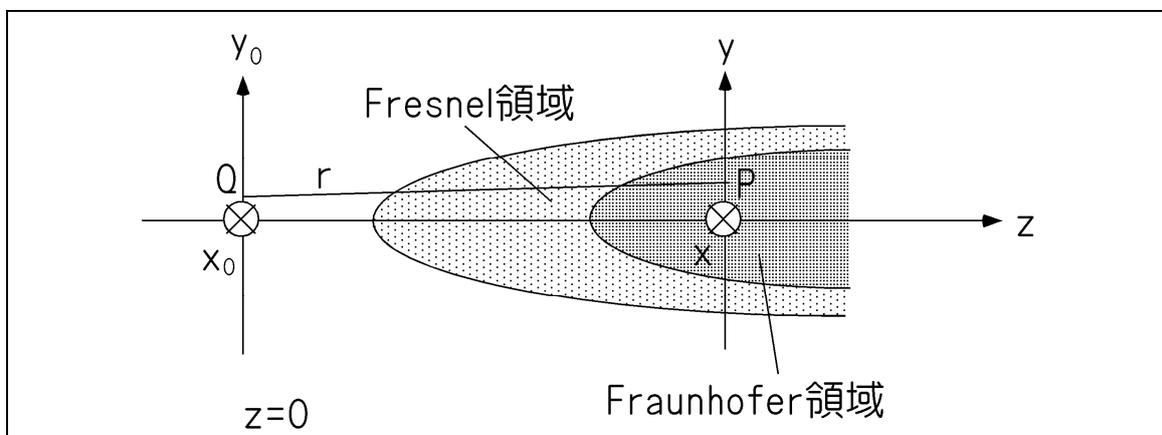


図 18. Fresnel 領域と Fraunhofer 領域

・ Fresnel 回折の計算法 (Fresnel 積分と Cornu Spiral)

Fresnel 回折によるパターンを求めるには、一般に回折積分(116)を数値積分により求める必要がある。すなわち

$$\varphi(x) = \int_{x_{01}}^{x_{02}} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda z} \{(x-x_0)^2\}\right] dx_0 \quad (122)$$

の形の積分を行う必要がある。ここで $\sqrt{2/\lambda z}(x-x_0) = \alpha$ とおくと

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_{01}} \exp\left\{-\frac{i\pi\alpha^2}{z}\right\} d\alpha = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_{01}} \left\{ \cos\left\{\frac{\pi\alpha^2}{2}\right\} - i \sin\left\{\frac{\pi\alpha^2}{2}\right\} \right\} d\alpha \\ &= \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left[\{C(\alpha_1) - C(\alpha_2)\} - i \{S(\alpha_1) - S(\alpha_2)\} \right] \end{aligned} \quad (123)$$

ここで次の積分を導入した。

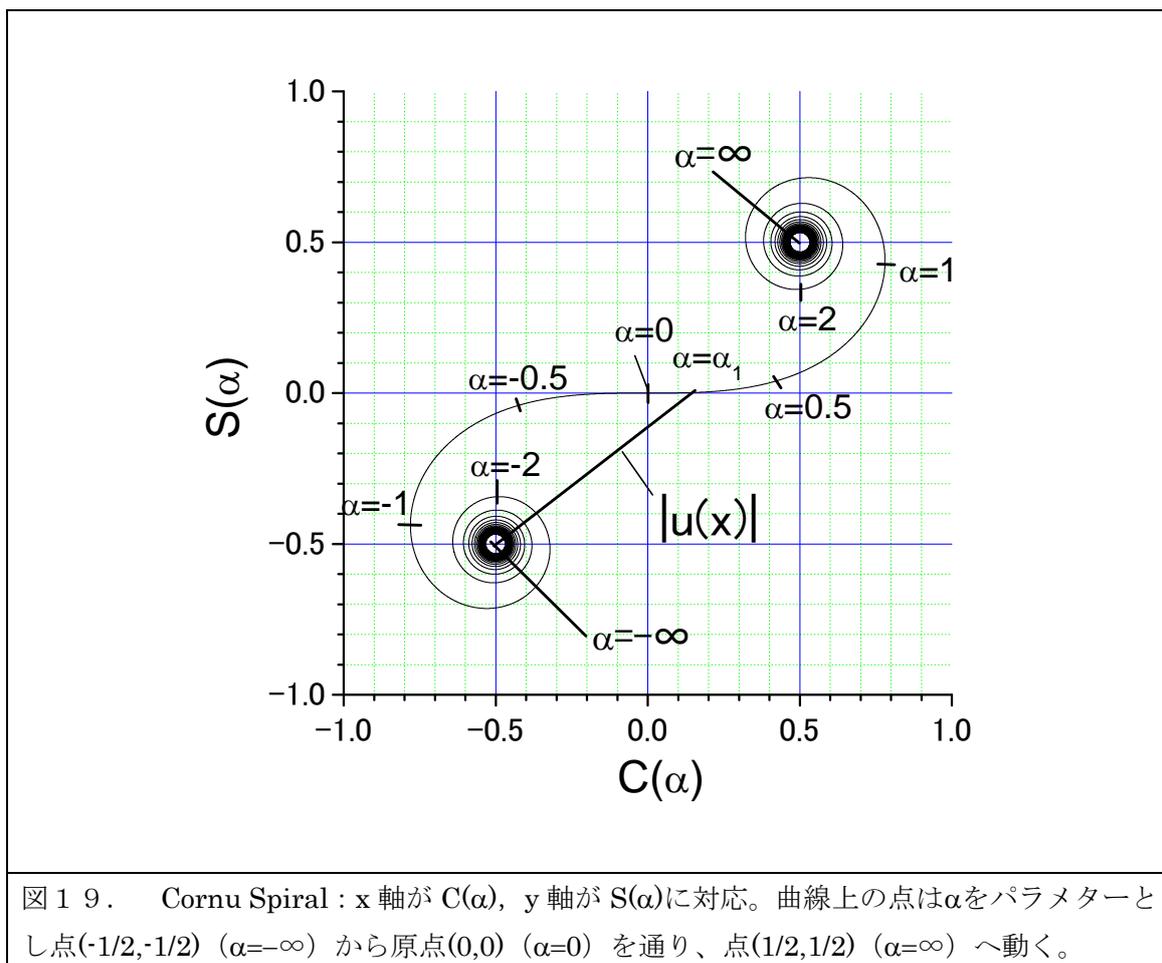


図 1 9. Cornu Spiral : x 軸が $C(\alpha)$, y 軸が $S(\alpha)$ に対応。曲線上の点は α をパラメータとし点 $(-1/2, -1/2)$ ($\alpha = -\infty$) から原点 $(0,0)$ ($\alpha = 0$) を通り、点 $(1/2, 1/2)$ ($\alpha = \infty$) へ動く。

$$C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos\left\{\frac{\pi\alpha^2}{2}\right\}d\alpha, \quad S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin\left\{\frac{\pi\alpha^2}{2}\right\}d\alpha \quad (124)$$

この $C(\alpha)$ 及び $S(\alpha)$ で与えられる積分を **Fresnel 積分** と呼び、関数表にその値がでている。任意の α に対する $C(\alpha)$ と $S(\alpha)$ の値を、 α をパラメーターとして、 $C(\alpha)$ を横軸、 $S(\alpha)$ を縦軸にとり平面上にプロットしたものが図 19 で、渦巻き状の曲線になる。この渦巻きを **Cornu Spiral** という。Fresnel 積分は $\alpha=0$ 、及び $\alpha=\infty$ では

$$C(0) = S(0) = 0, \quad C(\pm\infty) = S(\pm\infty) = \pm\frac{1}{2} \quad (125)$$

で与えられる。

・ **Fresnel 回折の例 1 : 遮光エッジによる回折**

最も簡単な Fresnel 回折の例として、 z 軸方向に伝播する単位振幅の平面波が xy 面の半分($x<0$)が不透明な遮蔽板でさえぎられたときのエッジ近傍の光波をしらべる。このとき $z=0$ での開口関数は、

$$u(x_0, y_0) = 1 \quad (x > 0) \\ = 0 \quad (x < 0) \quad (126)$$

で与えられ、 y 軸方向には一様なので、(116)式の回折積分は x 方向についての 1 次元積分になり

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{i \exp(-ikz)}{\lambda z} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{i\pi}{z\lambda}(x-x_0)^2\right) dx_0 \\ &= \frac{i \exp(-ikz)}{\lambda z} \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \int_{-\infty}^{\alpha_1} \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\alpha^2\right) d\alpha \\ &= \frac{i \exp(-ikz)}{\lambda z} \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left[\{C(\alpha_1) - C(-\infty)\} - i\{S(\alpha_1) - S(-\infty)\} \right] \\ &= \frac{i \exp(-ikz)}{\lambda z} \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left\{ \left(C(\alpha_1) + \frac{1}{2} \right) - i \left(S(\alpha_1) + \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1 \text{次元エッジによる回折振幅}) \quad (127)$$

と表せる。ここで $\alpha_1(x_0 = 0) = \sqrt{2/\lambda z}x$ である。また、回折像の強度分布は

1次元エッジによる Fresnel 回折強度

$$I(x) = |u(x)|^2 \propto \frac{1}{\lambda z} \left\{ \left(C(\alpha_1) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(\alpha_1) + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \quad (128)$$

で与えられる。上の積分は図 19 の Cornu Spiral 上の $(C(-\infty), S(-\infty)) = (-1/2, -1/2)$ の点から $(C(\alpha_1), S(\alpha_1))$ の座標点までの距離の 2 乗に比例した量として、グラフまたは Fresnel 積分の数表から求めることができる。遮光エッジによる Fresnel 回折の様子を図 20 に示

す。また、円形開口、及び矩形開口の場合の Fresnel 回折のパターンの実例を図 21(a)および図 21(b)にそれぞれ示す。

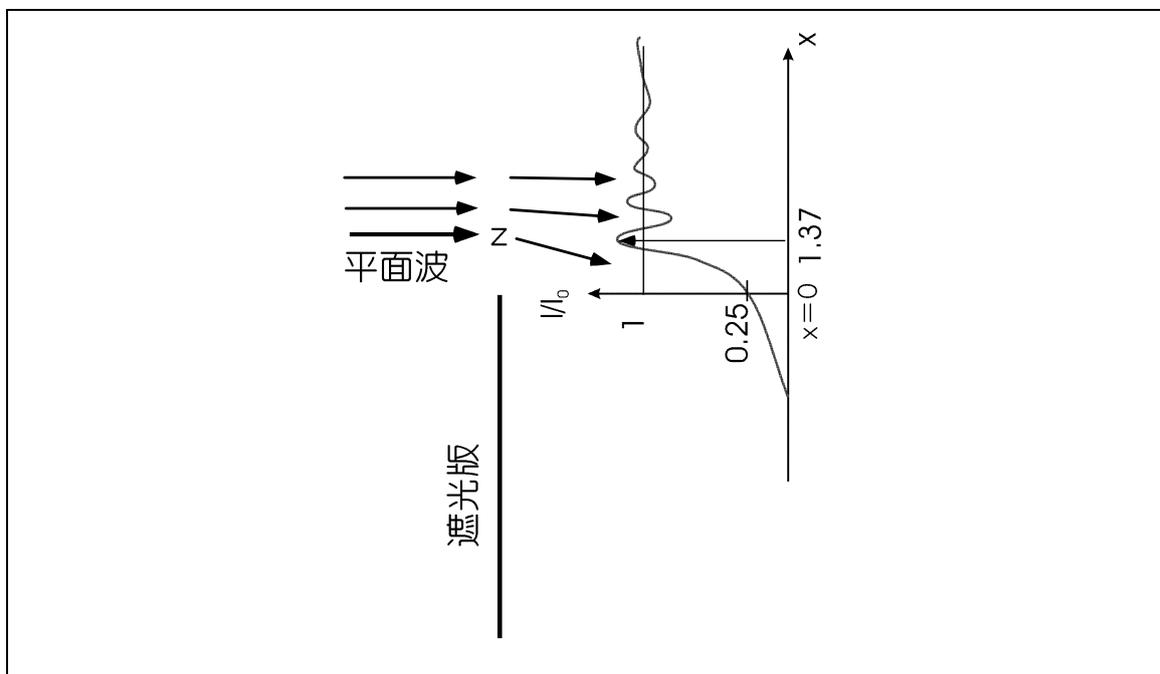
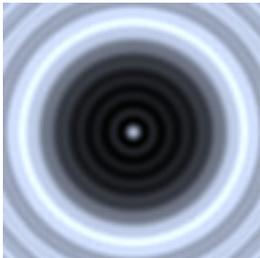
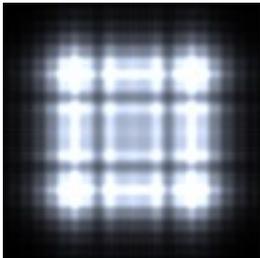


図 20. 遮光エッジによる Fresnel 回折の様子。

<p>(a)</p> 	<p>(b)</p> 
<p>図 21(a): 円形開口からの Fresnel 回折パターン。イメージ領域は 2cm x 2cm で HeNe レーザーの 632.8nm 波長の光を 20cm はなれた 0.5mm の円形開口に照射し、2 m 後方で観測したもの。</p>	<p>図 21(b): 矩形開口からの Fresnel 回折パターン。イメージ領域は 2cm x 2cm で HeNe レーザーの 632.8nm 波長の光を 20cm はなれた 1.4mm x 1.4mm の矩形開口に照射し、2 m 後方で観測したもの。</p>

・ Fresnel 回折の例 2 : Zone Plate (輪帯板)

開口の形が回転対称で、その半径方向の振幅透過率の変化に周期性のあるものを **Zone Plate**(日本語訳は**輪帯板**)と呼んでいる。中心からの距離 ρ に比例して、空間周波数が増大するもので、振幅が正弦波状に連続に変化するものを **Gabor 型 Zone Plate**、矩形波状に変

化するものを **Fresnel 型 Zone Plate** と呼んでいる。

Gabor 型 Zone Plate の振幅透過率は

$$g(\rho) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left(2\pi \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right\} \quad (129)$$

あるいは複素振幅表示で

$$g(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \exp \left(2\pi i \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) + \frac{1}{4} \exp \left(-2\pi i \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \quad (\text{Gabor 型 Zone Plate の振幅透過率}) \quad (130)$$

と表せる。振幅 1 で波長 λ の平面波が入射する場合を考えると透過光の複素振幅もやはり (130) で表せる。この式の第 1 項は 1/2 の振幅を持ち、入射光と同じ方向に直進する平面波である。第 2 項は 1/4 の振幅の振幅を持ち、収束点が

$$z_0 = \frac{\rho_0^2}{2\lambda} \quad (131)$$

で与えられる収束球面波である (収束球面は $\exp(i\pi\rho^2 / \lambda z_0)$ で与えられることに注意)。同

様に第 2 項は 1/4 の振幅の振幅を持ち、開口前の点

$$z_0 = -\frac{\rho_0^2}{2\lambda} \quad (132)$$

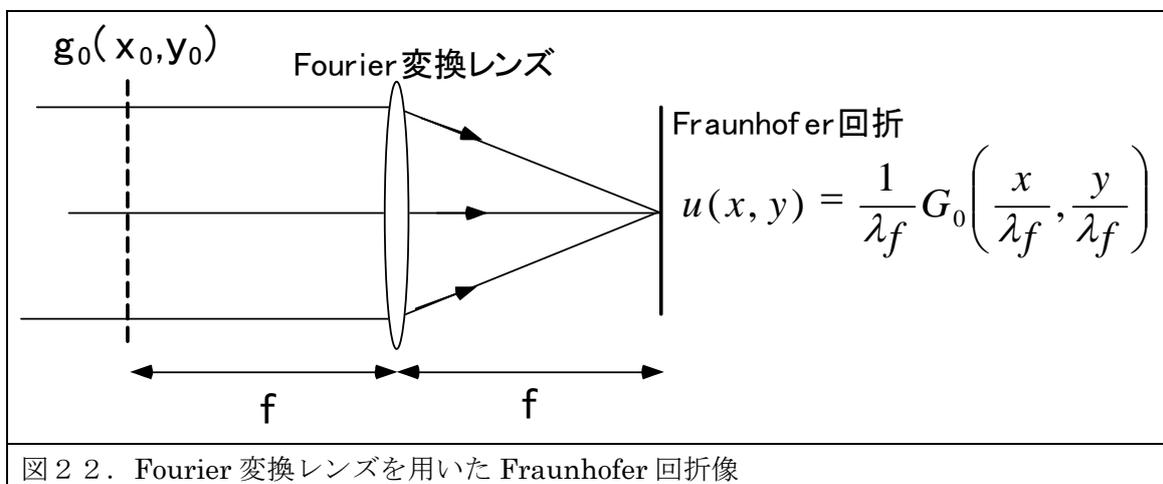
から発散する球面波を表す。したがって、Gabor 型 Zone Plate は正および負のレンズ作用を持ち、その焦点距離は (131) および (132) で与えられる。

Fresnel 型 Zone Plate の振幅透過率は、基本周波数の奇数倍の周波数をもつ多くの正弦波の和で記述できる。

$$\begin{aligned} g(\rho) &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos \left\{ \frac{2\pi(2n-1)\rho^2}{\rho_0^2} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp \left\{ \frac{2\pi i(2n-1)\rho^2}{\rho_0^2} \right\} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp \left\{ -\frac{2\pi i(2n-1)\rho^2}{\rho_0^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{Fresnel 型 Zone Plate の振幅透過率}) \quad (133)$$

この式の第 1 項は直進する平面波、第 2 項は $f_{2n-1} = \rho_0^2 / 2\lambda(2n-1)$ の各点に焦点を持つ多数の収束球面波、第 2 項は $f_{2n-1} = -\rho_0^2 / 2\lambda(2n-1)$ の各点 (レンズの前の虚焦点) から発散する多数の発散球面波を表している。したがって Fresnel 型 Zone Plate は多焦点の正および負のレンズ特性を持つ。レンズとしての特性は Gabor 型 Zone Plate に劣るが、Fresnel 型 Zone Plate は Binary Plate なので製作が容易である。

・ Fraunhofer 回折と開口関数の Fourier 変換



Fraunhofer 回折は z が非常に大きいところで観測されるため、無限遠での Fabry-Perot エタロンの回折パターンをレンズでスクリーンに投影したように、レンズを用いて観測するのが便利である。レンズを透過した平面波は焦点 f を中心とする収束球面波に変換されるので、その振幅は $\exp(ikr)$ になる (r は焦点からの距離)。薄肉レンズで、光軸近傍であれば $r = \sqrt{f^2 + x^2 + y^2} \cong f + (x^2 + y^2)/2f$ と近似できるので、レンズ直後の球面波の相対的な複素振幅は $\exp(ik(x^2 + y^2)/2f)$ で与えられる。したがって、レンズは $k(x^2 + y^2)/2f$ の位相シフトを与える素子とみなすことができる。そこで、レンズの手前の焦点距離 f と等しい位置に、開口 $g_0(x_0, y_0)$ があり、レンズの後方でやはり焦点距離 f と等しい位置で回折像を観測する場合を考える。Fraunhofer 回折の式(119)において $z \rightarrow f$ と読み替え、レンズ透過による位相シフトが $k(x^2 + y^2)/2f$ であることを考慮すれば、積分の前の $\exp(-ik(x^2 + y^2)/2f)$ の位相項とレンズによる位相シフト $\exp(ik(x^2 + y^2)/2f)$ が互いにキャンセルするので、位相定数 $\exp(i2kf)$ を省略して書けば、式(119)は

Fraunhofer 回折の Fourier 変換による表現

$$u(x, y) = \frac{1}{\lambda f} \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda f}(xx_0 + yy_0)\right\} dx_0 dy_0 \tag{134}$$

$$= \frac{1}{\lambda f} G_0\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

と書くことができる。ここで $G_0(x/\lambda f, y/\lambda f)$ は $x/\lambda f$ 及び $y/\lambda f$ をそれぞれ x 軸、 y 軸方向の空間周波数とする g_0 の 2 次元 Fourier 変換である。このように Fraunhofer 回折では回折像

は開口関数の Fourier 変換に対応していることが分かる。このことから結像に用いているレンズを Fourier 変換レンズと呼ぶ。

・ Fraunhofer 回折の例：円形開口の場合 (Airy の Disk)

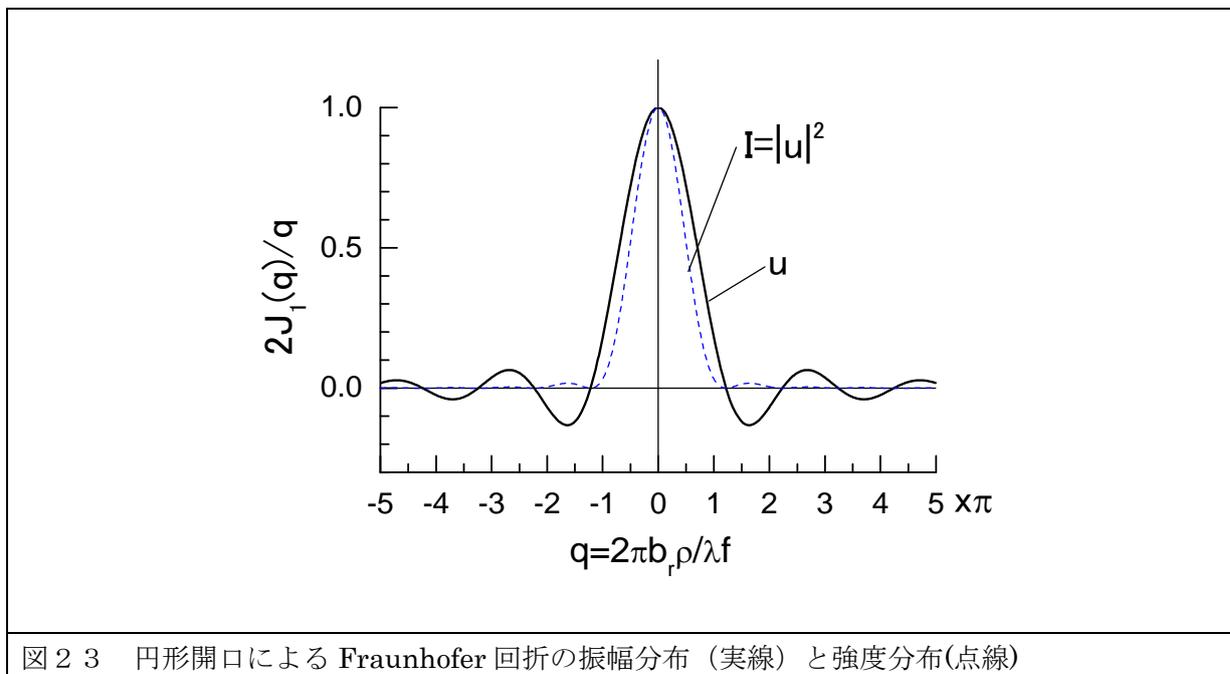


図 2 3 円形開口による Fraunhofer 回折の振幅分布 (実線) と強度分布(点線)

Fraunhofer 回折の例として、単位振幅の平面波が円形開口 (半径 b_r) で回折される場合を考えてみよう。このとき開口は

$$g_0(x_0, y_0) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b_r}\right) \quad (135)$$

$$\text{circ}\left(\frac{r}{b_r}\right) = 1 \quad (r \leq b_r) \quad (136)$$

$$\text{circ}\left(\frac{r}{b_r}\right) = 0 \quad (r > b_r)$$

と表せる。ここで z 軸を中心とする極座標に変換すると

$$x_0 = r \cos \theta, \quad y_0 = r \sin \theta, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{1}{\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b_r}\right) \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda f}(xx_0 + yy_0)\right\} dx_0 dy_0 \\
 &= \frac{1}{\lambda f} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_r} \text{circ}\left(\frac{r}{b_r}\right) \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda f} r\rho(\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi)\right\} r dr d\theta \\
 &= \frac{\pi b_r^2}{\lambda f} \left[\frac{2J_1(2\pi b_r \rho / \lambda f)}{2\pi b_r \rho / \lambda f} \right] \equiv u(\rho)
 \end{aligned} \tag{137}$$

となる。ここで J_1 は第 1 種第 1 次の Bessel 関数である。したがって回折像の強度は

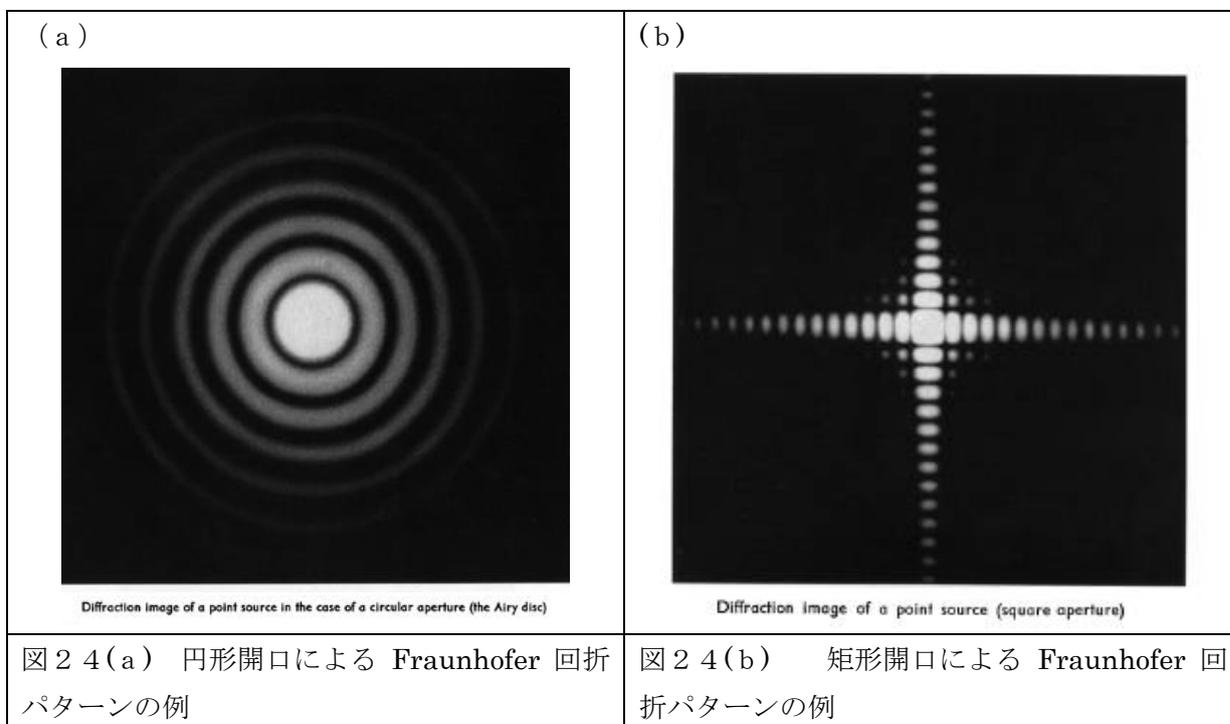
$$I(\rho) = \frac{1}{2} |u(\rho)|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi b_r^2}{\lambda f} \right)^2 \left[\frac{2J_1(2\pi b_r \rho / \lambda f)}{2\pi b_r \rho / \lambda f} \right]^2 \quad (\text{Airy の Disk パターン}) \tag{138}$$

となる。上の式の [] 内の関数(振幅)分布およびその 2 乗 (強度) 分布を図 2 3 に示す。

この回折像は図 2 4 (a) に示すように回転対象の同心円状のリングパターンで、Airy の Disk と呼ばれている。一番中心に近い暗いリングの半径は

$$\Delta\rho = 0.61 \frac{\lambda f}{b_r} \quad (\text{無収差光学系の分解能}) \tag{139}$$

で与えられる。これは無収差光学系における分解能を与える量である。 矩形開口の場合の Fraunhofer 回折像の例を図 24(b) に示す。



E. ホログラフィー

ホログラフィーは回折と干渉の効果を応用した新しい写真技術であり、1948年 Gabor によって発明された。ホログラフィーでは 3 次元的な空間情報の記録および再生が可能で、また冗長度の高い（すなわち情報が部分的破損などにより失われにくい）高密度記録、多重記録が可能などの特徴を持っている。光メモリー、ディスプレイ、光情報処理、光干渉計測、セキュリティなどの分野で応用されている。以下にホログラフィーの基本原則について簡単に説明する。

レーザーなどのコヒーレント光（単色性にすぐれ、時間及び空間コヒーレンスがよい光）で物体を照射したとき、物体を透過または反射した光（**物体光**）が感光材料のある xy 面で

$$A_0(x, y) = a_0(x, y) \exp\{i\phi_0(x, y)\} \quad (140)$$

の複素振幅を持つとする。一方、同じ光源から分岐させ、物体を側方を通り同じ感光材料面に入射する光波（**参照光**）の複素振幅を

$$A_r(x, y) = a_r(x, y) \exp\{i\phi_r(x, y)\} \quad (141)$$

とする。

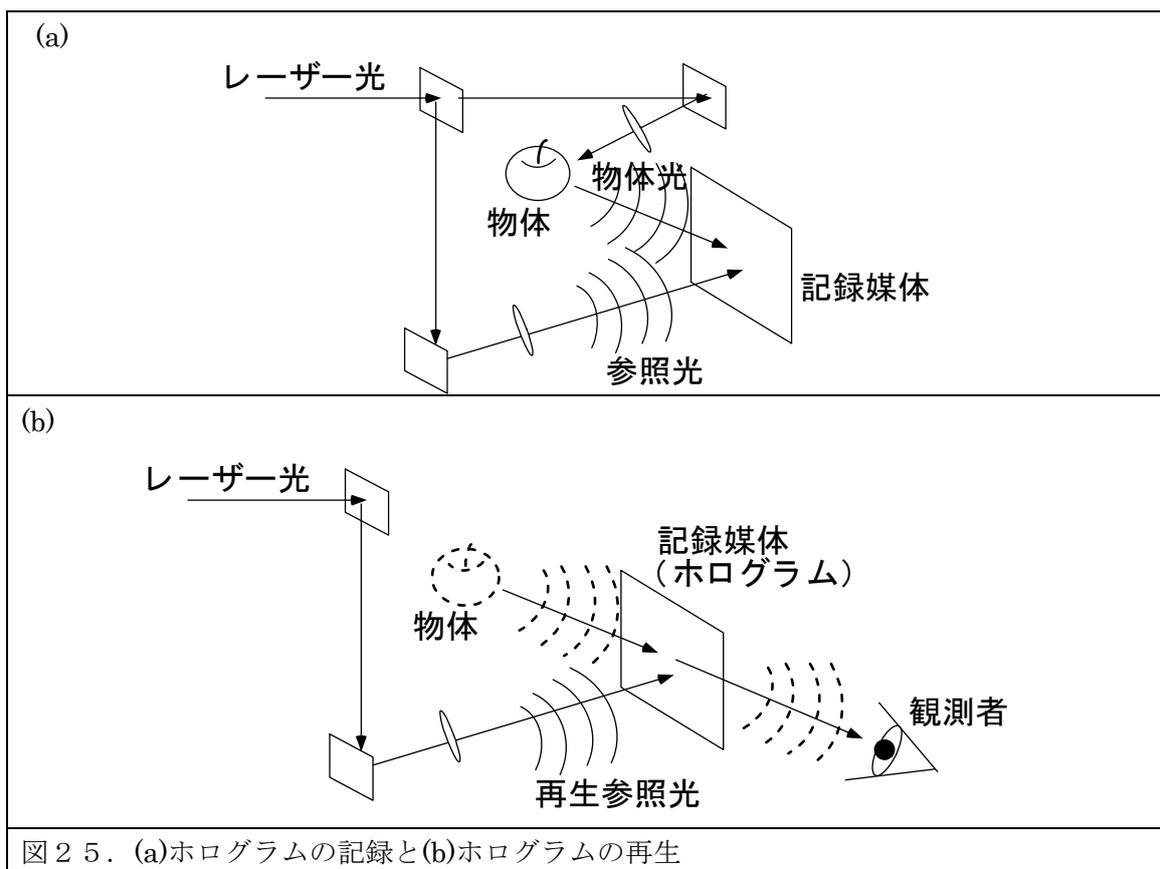


図 25. (a)ホログラムの記録と(b)ホログラムの再生

物体光と参照光は感光材料の面で干渉しあい、その強度分布 $I(x, y)$ はそれぞれの複素振幅の和を 2 乗したもので与えられるので

$$\begin{aligned}
 I(x, y) &= |A_r(x, y) + A_0(x, y)|^2 = |A_r|^2 + |A_0|^2 + A_r^* A_0 + A_r A_0^* \\
 &= a_r^2 + a_0^2 + 2a_r a_0 \cos(\phi_r - \phi_0)
 \end{aligned}
 \tag{142}$$

となる。ここで $a_r^2 + a_0^2$ は直流成分、 $2a_r a_0 \cos(\phi_r - \phi_0)$ は交流(干渉)成分に相当する。この干渉縞を露光し現像した感光材料を**ホログラム**と呼ぶ。その振幅透過率を $T(x, y)$ とすると、 $T(x, y)$ が露光量 (光強度 $I \times$ 露光時間 t) に対して直線的に変化すると仮定すれば、

$$T(x, y) = k_0 + k_1 I(x, y) \tag{143}$$

と書ける。ここで k_0 は感光材料の露光前の透過率で、 k_1 は感光材料の感度に関係した定数である。光強度 I を干渉縞の強度(142)で置き換えると、

$$T(x, y) = k_0 + k_1 |A_r|^2 + k_1 |A_0|^2 + k_1 A_r^* A_0 + k_1 A_r A_0^* \tag{144}$$

となる。このようにして感光された後のホログラムに照明光 (**再生照明光**) を与え、物体光を再生することができる。再生照明光として物体光記録に用いた参照光と同じ光 $A_r(x, y)$ を与えると、ホログラムを透過した光 $T'(x, y)$ は(144)式の透過率 $T(x, y)$ と $A_r(x, y)$ の積で与えられ、

$$\begin{aligned}
 T'(x, y) &= A_r T(x, y) = (k_0 + k_1 |A_r|^2) A_r + k_1 |A_0|^2 A_r + k_1 |A_r|^2 A_0 + k_1 A_r^2 A_0^* \\
 &= T'_1 + T'_2 + T'_3 + T'_4
 \end{aligned}
 \tag{145}$$

となる。ここで第1項 $T'_0 = \{k_0 + k_1 |A_r|^2\} A_r$ は再生照明光 A_r が定数 $\{k_0 + k_1 |A_r|^2\}$ の減衰を受け、その波面の形を変えずに直進する光波成分である。第2項 $T'_2 = k_1 |A_0|^2 A_r$ は $|A_0|^2$ がゆるやかに変動する直流項なので、再生参照光 A_r はわずかな回折を受けるが、ほぼ同じ方向に進む光波成分である。したがって、第1項 T'_0 と第2項 T'_2 をあわせて0次の回折光と呼んでいる。第3項 $T'_3 = k_1 |A_r|^2 A_0$ は定数 $k_1 |A_r|^2$ の減衰を受けるが、**物体光 A_0 がその波面の形を変えずに再生されて出てくることを表している**。ホログラフィーにおいては一旦感光材料に記録された物体光がこの第3項を通じて同じ波面、すなわち同じ振幅(減衰はするが)と位相を持った光波として再生されるのであり、この光波 T'_3 は物体の像を、物体もとの位置に結像する。したがって、この光がそこにあった物体を透過あるいは反射した場合と同じ振る舞いをするために、観測者にとってはあたかもそこに実際に物体があるように立体感を持って観測されることになる。最後の第4項 $T'_4 = k_1 A_r^2 A_0^*$ は物体光と共役な波面 A_0^* がでてくることを示しているが、 A_r^2 に含まれる位相項 $\exp(i2\phi_r)$ によってその波面は歪みをうけ、強く回折される光であることが分かる。この物体光の共役波面 A_0^* は、ホログラム面に関して物体光 A_0 と面対称の関係にあり、したがって A_0 による直接像と対象な共役像を結ぶ。共役像を回折の歪みなく再生するためには、参照光と共役な光波 A_r^* (反対方向から入射する A_r と同じ波面を持った光波) を再生参照光として用いる ($k_1 |A_r|^2 A_0^*$ を

得る)。

「第 1 章 光学基礎」に関する参考書：

[1] Max Born and Emil Wolf, “Principle of Optics,” (Cambridge University Press) :

日本語版は東海大学出版会から 2 部構成で出ている。古典ともいえる Optics の教科書の定番。大部なので、読み通すというよりは辞書的な使い方に適していると思われる。1959 年に初版が出版されている。

[2] Eugene Hecht, “Optics” (Addison-Wesley Publishing Company, 1987) : Optics の現代的な教科書。図や写真が豊富で、レーザーなどの装置的な記述もある。

[3] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics,” (John Wiley & Sons) : 電磁波動論の名著。初版は 1962 年。

[4] 村田和美「光学」(サイエンス社) : 古典光学に関する手ごろな教科書。幾何光学、収差に関する記述が詳しい。

[5] 栖原敏明 (阪大工電気電子工学専攻)「光波工学」(コロナ社) : 光の伝播、とくに導波路に関する記述が詳しい。また、電気光学効果、磁気光学効果に関する記述もある。

<番外編：光学に関する需要人物>

ホイヘンス、クリスティアン(Christiaan Huygens =Christiani Hugeni Zulichenmii, 1629.4.14-1695.7.8).



オランダ、ハーグに生まれ、ハーグに死す。

物理学・数学・天文学者。[デカルト](#)と親交のあった父（政治家）の影響で、デカルトを学ぶ。光の伝播に関するホイヘンスの原理。[ガリレイ](#)を尊敬しガリレイを超えることを1つの目標とした。航海時代に入り、海上で経度を決定する方法が時代の最大の問題の1つであった。その方法として、正確な時計を作ることに大きな関心が寄せられ、サイクロイドを用いた等時の振り子時計の(実作を可能にする)理論を作り、特許を得た(1656)。しかし、実際に航海に使用するには安定性が不十分で、ゼンマイを使ったものがイギリスの時計師によって作られそちらが主流となる。ホイヘンスの動機のひとつは時計製作にあり、そのための理論を構築していったのだが、実用上は代替物のほうが実用的で、成功したとは言いにくい。しかし、そのために整備した理論が後世に大きな影響を与えてい

る。ホイヘンスのレムニスケート。

焦点距離 3.5m の望遠鏡を弟とともに作り、1655 年土星の月のタイタンを発見、自転周期が約 16 日であると観測。1659 年、7m の望遠鏡で土星の環の構造を観測し、公表。それまで環は「土星の腕」と呼ばれていて土星にくっついていると思われていた。

[ニュートン](#)にも会って好意を持ったというが、光の理論で粒子説を唱えるニュートンに対し、波動説を唱えている。

日本語に訳されたものはたとえば、『ホイヘンス』科学の名著 II 期 10, 朝日出版社を参照。

フラウンホーファー(Joseph Fraunhofer, 1787-1826)



Newton は、白色光を分け、色の本質を理解したのでありましたが、物質のスペクトルが初めて系統的に測定されたのは 1814 年の Fraunhofer の太陽光の観測によってでありました。物質の発光スペクトルは、それ以前にも部分的に知られており、吸収スペクトルも Wollaston により報告されていましたが、何と云っても Fraunhofer によって精密に記録された太陽スペクトルが高分解能分光学の始まりであることに異存はないでしょう。その当時、写真はまだまだありませんでしたから、Fraunhofer は 574 本の吸収線を一本一丁寧に測定し手で書き残したのです。当時はまだ、原子・分子の概念は判明しておらず、これらのスペクトル線が何を意味するか Fraunhofer にとっては知り由もなかったのです。彼は、スペクトル線の強いものにアルファベット順に A, B, C, D, . . . 等の符合を付けました。後になって、D 線はナトリウムの有名な D 線、C 線と F

線は、水素原子のバルマー α 、 β と、その正体が明らかになるのです。この論文の題名は、「色収差のない望遠鏡を完成するための各種ガラスの屈折率と分散能の測定」で、スペクトル線は光学測定の手段として現れます。しかし、この論文が分光学史最初にして最大の発見であり、近代分光学、天体物理学はここに始ったといっても過言ではないでしょう。彼は、この太陽スペクトルの直後に、他の惑星を観測しています。1817 年の論文では金星のスペクトルが太陽と同じであるが、シリウスのスペクトルは、太陽スペクトルと全く異なることを指摘しています。さらに 6 年後の論文では、火星、金星、シリウス、カストル、ポルクス、カペラ、アークチュルス、プロキオン等のスペクトルを観測したことを報告しています。近代の天体物理観測においては、原子分子のスペクトルが主要な役割を果たします。Fraunhofer が、分光学の始祖であるばかりか、天体物理学の父と呼ばれる所以がここにあります。



フレネル(Augustin Jean Fresnel, 1788.5.10-1827.7.14).

フランス、ノルマンディ、ブローリに生まれ、結核のためヴィユ・ダヴレーに死す。

物理学者・土木技師。エコール・ポリテクニーク卒業後土木局に勤務。1814年ナポレオンがエルバ島から戻って来た際職を辞し、ノルマンディの自宅に監禁される。光の波動説を解析学を用いて包括的で厳密な理論に発展させた。反射光の偏光に着目し、光が横波であることを主張。

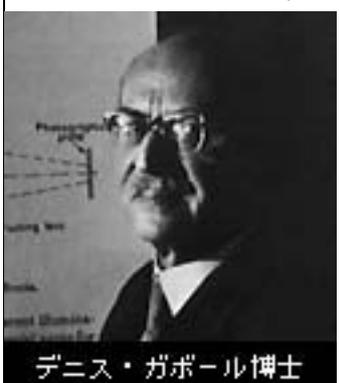


ヘルムホルツ(Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821.8.31-1894.9.8).

ドイツ、ポツダムに生まれ、ベルリンに死す。

ベルリンの軍医学校を1843年に卒業後、ポツダムの連隊に配属されるが余暇のすべてを研究にささげる。1858年にボン大学の解剖学・生理学教授となり、1871年にベルリン大学の物理学教授になる。主要な業績は数理物理学と音響学。音楽理論の附録としてフーリエ級数を使用。また1842年に熱力学の第1法則に関する論文。非ユークリッド空間の性質の研究から、リーマン計量の研究に進み、後のS.リーの研究に影響。ヘルムホルツ・リーの定理、ヘルムホルツ方程式など。

ガボール, デニス(Gabor, Dennis, 1900.6.5-1979.2.9)



デニス・ガボール博士

イギリス(ハンガリー出身)の電気工学、応用物理学者。ブダペストに生まれ、ブダペスト工科大学、ベルリン工科大学で電気工学を学び、1927年高速陰極線オシログラフの開発により学位を得た。ジューメンズ社に入り、高圧石英水銀ランプを発明。1934年イギリスに移り、ブリティッシュ・トムソン・ハウストン社において放電管の研究に従事。戦後は通信理論、立体映画の開発を行った。1948年ホログラフィー法の着想を得て、次のような波面再生法の基礎実験を行った。通常の写真像では物体によって乱された波動場の強度しか記録できず、位相の情報は失われてしまう。そこで位相を含めた波動場を再生するために、物体によって乱されない波動の一部すなわち参照波を物体からの波と重ね、その干渉図形を写真記録して強度と位相の情報を含むホログラムを作成する。次にこれを参照波

のみで照らすと、物体による波動場すなわち波面が再生される。電子顕微鏡では電子レンズの球面収差が極めて大きく、レンズの口径を大きくすることができないため、電子線の短い波長に対応する高分解能が得られない。彼は電子顕微鏡像を2段階で作成し、その分解能を向上する着想を得た。すなわち、第1段階で電子線によるホログラムを作成し、これを光で照射して再生し、その際球面収差の影響を除去しようというものである。しかし十分な干渉性をもつ電子線が得られなかったため、両段階とも光を用いて実験を行い、原理の正しいことを示した。後に干渉性の高いレーザーが実用化されるに及んでホログラフィー法は急速な進歩を遂げた。1949年ロンドン王立科学工科大学に移り、電子工学(のちに応用物理学)の教授に就任、水銀アーク中の電子相互作用、ウィルソン霧箱の改良、ホログラフィー、電子分光計、時系列の予知、識別、シュミレーションを行うアナログ計算機など実験的研究および、通信、プラズマ、核融合に関する理論的研究を行った。「ホログラフィーの発見とその発展」に対し1971年ノーベル物理学賞を受賞。1967年の引退後も王立大学、アメリカCBS(コロンビア放送会社)研究所において通信と表示方式の研究を行っている。また1958年以後、工業文明と社会の関連に関する考察を「将来の創造」、「革新」および「成熟した社会」の3冊の著書で発表した。(培風館の物理学辞典より)

(インターネットでの検索による)